UNIVERSITAS GADJAH MADA

Kuliah Umum Aljabar Komunitas Peminat Aljabar Seri 4 Sesi 1:

Homomorfisma Ring

Uha Isnaini

Laboratorium Aljabar,

Departemen Matematika, FMIPA UGM

isnainiuha@ugm.ac.id

KERJASAMA:

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Outline

1. Pengantar
2. Homomorfisma Ring
   - Motivasi
   - Definisi
   - Contoh
   - Sifat
3. Teorema Utama Homomorfisma Ring
   - Motivasi
   - Teorema
   - Aplikasi
4. Penutup

"If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is."
– John von Neumann[1]

[1] Remark made by von Neumann as keynote speaker at the first national meeting of the Association for Computing Machinery in 1947.

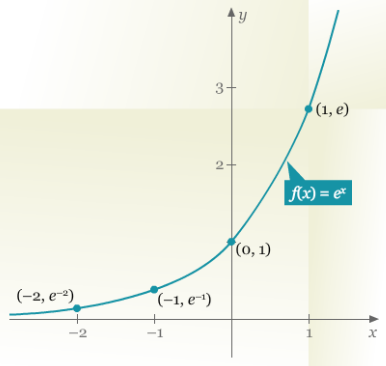
Tahapan Polya (George Pólya, 1887 – 1985) :

1. Pahami masalah / *Understand the problem*
   - Nyatakan masalah dengan bahasa sendiri
   - Garis bawahi apa yang menjadi pertanyaan
   - Identifikasi apa yang tidak diketahui
   - Identifikasi informasi yang tidak relevan
2. Membuat rencana / *Devise a plan (translate)*
   - Melihat pola dan menebak
   - Review masalah yang mirip
   - Buat tabel, diagram atau gambar
   - Kerja dari belakang
   - Identifikasi subgoal
3. Menjalankan rencana / *Carry out the plan (solve)*
   - Memastikan setiap langkah sudah benar
4. Melihat kembali / *Look back (check and expand)*
   - Cek kembali keseluruhan metode
   - Cek kemungkinan solusi alternatif
   - Solusi untuk masalah lain yang berkaitan

Ingat kembali apa yang sudah dipelajari mengenai homomorfisma grup pada Kuliah Umum Aljabar seri 1.
Dapatkah didefinisikan homomorfisma di ring?
Bagaimana sifat-sifatnya?

Dari Kalkulus:
SIFAT FUNGSI EKSPONENSIAL

Pandang fungsi eksponensial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = e^x$.



Telah diketahui salah satu sifat fungsi eksponensial: untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku sifat

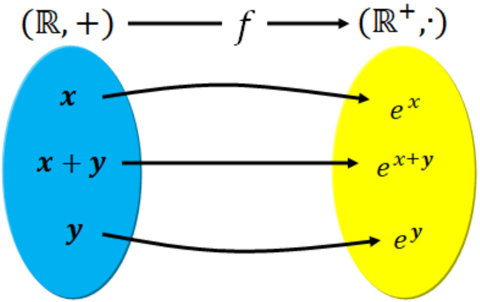
$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

yakni

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

- **Dari grafik di atas nampak bahwa *DOMAIN* dari fungsi eksponential $f(x) = e^x$ adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ (bilangan-bilangan real sepanjang sumbu X) yang sudah kita ketahui merupakan *grup terhadap penjumlahan* dan ditulis sebagai $(\mathbb{R}, +)$**
- **Sedangkan IMAGE dari fungsi eksponential $f(x) = e^x$ adalah himpunan bilangan real positif $\mathbb{R}^+$ (semua y pada sumbu Y yang berada di atas sumbu X) yang merupakan grup terhadap perkalian dan ditulis dengan $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.**

Dengan demikian, fungsi $f(x) = e^x$ dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut:



dengan sifat

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kesimpulan: terkait sifat-sifat fungsi eksponensial

1. **Fungsi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari grup ke grup.**
2. **Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, berlaku sifat**

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y).$$

3. **Dari sifat $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, terlihat bahwa fungsi f tersebut bersifat: peta dari jumlahan dua elemen dalam grup $(\mathbb{R}, +)$ sama dengan hasil kali masing-masing peta kedua elemen tersebut.**

Kesimpulan: terkait sifat-sifat fungsi eksponensial

4. **Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa:**

Dioperasikan dulu dua elemen di dalam grup $(\mathbb{R}, +)$ hasilnya SAMA dengan dipetakan masing-masing elemen tsb baru dioperasikan terhadap perkalian dalam grup $(\mathbb{R}^+, .)$.

5. **Sifat tersebut belum tentu berlaku pada sebarang fungsi dari $(\mathbb{R}, +)$ ke $(\mathbb{R}^+, .)$, sebagai contoh fungsi $f(x) = x^2$ tidak bersifat**

$$f(x + y) \neq f(x) \cdot f(y)$$

sebab $(x + y)^2 \neq x^2 \cdot y^2$.

PROSES ABSTRAKSI

Termotivasi dari sifat fungsi eksponensial yang telah dipaparkan sebelumnya, dilakukanlah proses abstraksi dan didefinisikan suatu fungsi antar grup yang disebut *homomorfisma grup*.

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \textbf{sebarang grup}(G, *_G)$$

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \textbf{sebarang grup}\ (G', *_{G'})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \\ \forall x, y \in (\mathbb{R}, +) \end{array} \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \begin{array}{c} f(x *_G y) = f(x) *_{G'} f(y), \\ \forall x, y \in (G, *_G) \end{array}$$

Definisi:
HOMOMORFISMA GRUP

Definisi 1

Diberikan sebarang dua grup $(G, *_G)$ *dan* $(G', *_{G'})$. *Fungsi* $f : G \to G'$ *disebut homomorfisma grup (Group Homomorphism) jika memenuhi*

$$f(g_1 *_G g_2) = f(g_1) *_{G'} f(g_2)$$

untuk setiap $g_1, g_2 \in G$

Interpretasi dari syarat homomorfisma grup.

- **Dapat diinterpretasikan bahwa homomorfisma grup adalah suatu fungsi yang mengawetkan operasi (***preserve the operation***), yakni peta dari hasil operasi sama (homo) dengan hasil operasi dari masing-masing petanya.**
- **Jadi urutan pengerjaan tidak mempengaruhi hasil.**

Perhatikan bahwa di ring, terdapat dua operasi yang terlibat. Dapatkah ditemukan fungsi yang mengawetkan kedua operasi pada suatu ring?

The Power of $\mathbb{Z}$

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan ring.
- $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ himpunan bilangan bulat modulo 3.
- $(\mathbb{Z}_3, +_3, \times_3)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 3.
- Pandang fungsi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_3 \\ a &\mapsto \overline{a}. \end{aligned}$$

- Perhatikan bahwa

$$f(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} +_3 \overline{b} = f(a) +_3 f(b)$$

dan

$$f(a \times b) = \overline{a \times b} = \overline{a} \times_3 \overline{b} = f(a) \times_3 f(b)$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

Kesimpulan:

1. **Fungsi $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari ring ke ring.**
2. **Dapat diinterpretasikan bahwa: Dioperasikan dulu dua elemen di dalam ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ hasilnya SAMA dengan dipetakan masing-masing elemen tersebut baru dioperasikan (dengan operasi yang sesuai) dalam ring $(\mathbb{Z}_3, +_3, \times_3)$.**
3. **Sifat tersebut <u>belum tentu</u> berlaku pada sebarang fungsi dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_3$.**
4. **Sebagai contoh, pandang fungsi**

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_3 \\ a &\mapsto \overline{1}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $g(1+2) \neq g(1) +_3 g(2)$.

PROSES ABSTRAKSI

Sama seperti pada kasus homomorfisma grup, dilakukanlah proses abstraksi dan didefinisikan suatu fungsi antar ring yang disebut *homomorfisma ring*.

$$(\mathbb{Z}, +, \times) \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \textbf{sebarang ring}(R, +_R, \times_R)$$

$$(\mathbb{Z}_3, +_3, \times_3) \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \textbf{sebarang grup } (R', +_{R'}, \times_{R'})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} f(x+y) = f(x) +_3 f(y), \\ f(x \times y) = f(x) \times_3 f(y), \\ \forall x, y \in (\mathbb{Z}, +, \times) \end{array} \xrightarrow{\textit{diabstraksikan}} \begin{array}{c} f(x +_R y) = f(x) +_{R'} f(y), \\ f(x \times_R y) = f(x) \times_{R'} f(y), \\ \forall x, y \in (R, +_R, \times_R) \end{array}$$

Definisi 2

Diberikan sebarang dua ring $(R, +_R, \times_R)$ *dan* $(R', +_{R'}, \times_{R'})$. *Fungsi* $f : R \to R'$ *disebut homomorfisma ring (Ring Homomorphism) jika memenuhi untuk setiap* $x, y \in R$,

$$f(x +_R y) = f(x) +_{R'} f(y) \text{ dan } f(x \times_R y) = f(x) \times_{R'} f(y).$$

Apakah interpretasi dari syarat homomorfisma ring?

Contoh 1 (terinspirasi dari contoh awal)

Diberikan ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dan $(\mathbb{Z}_n, +_n, \times_n)$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, yaitu $f(a) = \overline{a}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) +_n f(a_2) \text{ dan } f(a_1 \times a_2) = f(a_1) \times_n f(a_2).$$

Oleh karena itu, f merupakan homomorfisma ring.

Contoh 2

Diberikan ring

$$T_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Didefinisikan fungsi $g : T_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_{2\times 2}(\mathbb{Z})$,

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = a.$$

Mudah ditunjukkan bahwa fungsi g merupakan homomorfisma ring.

Dari Contoh 1 dan 2, apakah dapat dibentuk homomorfisma baru?

Contoh 3

Diberikan ring

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Didefinisikan fungsi $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, yaitu untuk setiap $a + bi \in \mathbb{C}$,

$$h(a+bi) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right).$$

Mudah ditunjukkan bahwa fungsi h merupakan homomorfisma ring.

Homomorfisma ring khusus

Suatu homomorfisma f dari ring R ke ring R' disebut:

1. **monomorfisma** jika f merupakan fungsi injektif,
2. **epimorfisma** jika f merupakan fungsi surjektif, dan
3. **isomorfisma** jika f merupakan fungsi bijektif.

- Dua ring R dan R' dikatakan **isomorfis**, dinotasikan $R \cong R'$, jika terdapat suatu isomorfisma dari R ke R'.
- Untuk isomorfisma dari ring R ke R' disebut **automorfisma.**
- Homomorfisma dari ring R ke ring R disebut **endomorfisma** dari R.
- Himpunan semua endomorfisma dari R dinotasikan $\mathrm{End}(R)$.

Contoh Isomorfisma Ring

Misalkan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Perhatikan homomorfisma $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow R$ dengan definisi $\varphi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

- Diambil sebarang $a+bi, x+yi \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $\varphi(a+bi) = \varphi(x+yi)$. Karena itu diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

  dan berakibat $a = x$ dan $b = y$. Dengan demikian, $a+bi = x+yi$, yang berarti φ bersifat injektif.

- Diambil sebarang $A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \in R$, yang berarti $r, s \in \mathbb{R}$. Dibentuk $c = r + si$, maka jelas bahwa $c \in \mathbb{C}$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $\varphi(c) = \varphi(r + si) = A$. Oleh karena itu φ bersifat surjektif.

Jadi homomorfisma φ merupakan isomorfisma dari ring $\mathbb{C}$ ke ring R. Akibatnya $\mathbb{C} \cong R$.

Sifat-sifat

Proposisi 1

Diberikan homomorfisma f dari ring R ke ring R'. Sifat-sifat berikut ini berlaku.

1. $f(0_R) = 0_{R'}$.
2. $f(-r) = -f(r)$ untuk setiap $r \in R$.

Proposisi 2

Misalkan R mempunyai elemen satuan 1_R dan f bersifat surjektif. Jika $r \in R$ mempunyai invers terhadap perkalian di R maka $f(r)$ juga mempunyai invers terhadap perkalian di R', yaitu

$$(f(r))^{-1} = f(r^{-1}).$$

Bayangan Homomorfisma Ring

Definisi

Diberikan sebarang homomorfisma ring $f : R \longrightarrow R'$. Karena f merupakan fungsi R ke R', **bayangan** dari f, yaitu

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(r) \mid r \in R\},$$

merupakan himpunan bagian tak kosong dari R'.

Proposisi 3

Diberikan sebarang homomorfisma ring $f : R \longrightarrow R'$. Berlaku sifat-sifat berikut:

1. $\mathrm{Im}(f)$ merupakan subring dari R',
2. Jika R adalah ring komutatif maka $\mathrm{Im}(f)$ merupakan ring komutatif.

Kernel Homomorfisma Ring

Definisi

Diberikan sebarang homomorfisma f dari ring R ke ring R'. **Kernel** dari f, dinotasikan $\ker(f)$, didefinisikan sebagai himpunan

$$\ker(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0_{R'}\}.$$

Dari definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_{R'}\}).$$

Sifat-sifat kernel

Proposisi 1

Diberikan sebarang homomorfisma ring $f : R \longrightarrow R'$. *Homomorfisma* f *merupakan monomorfisma ring jika dan hanya jika* $\ker(f) = \{0_R\}$.

Proposisi 2

Jika f *adalah homomorfisma ring dari ring* R *ke ring* R' *maka* $\ker(f)$ *merupakan ideal di* R.

Ingat kembali Teorema Utama Homomorfisma Grup

(telah dibahas di KUA seri 1)

UNIVERSITAS GADJAH MADA

The Power of $\mathbb{Z}$

- $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.
- $(3\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}$, diperoleh grup faktor $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$ terhadap operasi yang didefinisikan dengan

$$(a + 3\mathbb{Z}) + (b + 3\mathbb{Z}) = a + b + 3\mathbb{Z}$$

  untuk setiap $a + 3\mathbb{Z}, b + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ himpunan bilangan bulat modulo 3.
- $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan modulo 3.

Menggunakan teorema utama homomorfisma grup, dapat ditunjukkan bahwa

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3.$$

Teorema 1 (Teorema Utama Homomorfisma Grup (TUHG))

Jika $f: G \to G'$ homomorfisma, maka dapat dibentuk isomorfisma

$$f': {}^{G}\!/_{\ker(f)} \to \mathrm{Im}(f)$$

dengan definisi:

$$f'(g\ker(f)) = f(g)$$

untuk setiap $g\ker(f) \in {}^{G}\!/_{\ker(f)}$.

Teorema 2 (Teorema Utama Homomorfisma Ring (TUHR))

Jika $f : R \to R'$ homomorfisma, maka dapat dibentuk isomorfisma

$$f' : {}^{R}\!/_{\ker(f)} \to \mathrm{Im}(f)$$

dengan definisi:

$$f'(r + \ker(f)) = f(r)$$

untuk setiap $r + \ker(f) \in {}^{R}\!/_{\ker(f)}$.

Hint untuk bukti: Tunjukkan bahwa f' merupakan pemetaan, homomorfisma ring, bersifat injektif dan surjektif.

Misal I dan J masing-masing merupakan ideal dari ring R. Jelas bahwa $I \cap J$ dan $I + J$ masing-masing merupakan ideal di R. Mudah dipahami bahwa $I \cap J \subseteq I$ dan $J \subseteq I + J$, sehingga $I \cap J$ merupakan ideal dari I dan J merupakan ideal dari $I + J$. Akibatnya, dapat dibentuk ring faktor

$$I/(I \cap J) \text{ dan } (I + J)/J.$$

Dengan memanfaatkan TUHR dapat ditunjukkan bahwa kedua ring faktor tersebut isomorfis.

Teorema 3

Diberikan sebarang ring R. Jika I dan J masing-masing merupakan ideal di R, maka

$$I / (I \cap J) \cong (I + J) / J.$$

Hint untuk bukti: Dibentuk pengaitan

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow (I + J) / J \\ a &\longmapsto a + J. \end{aligned}$$

Selanjutnya tunjukkan bahwa f merupakan pemetaan dan homomorfisma ring, $\ker(f) = I \cap J$, $\mathrm{Im}(f) = (I + J) / J$.

Untuk aplikasi selanjutnya, misalkan I dan J masing-masing merupakan ideal di ring R dengan $J \subset I$. Dari kedua ideal tersebut dapat dibentuk beberapa ring faktor:

1. $R/I = \{\bar{r} = r + I \mid r \in R\}$,
2. $R/J = \{\bar{r} = r + J \mid r \in R\}$,
3. $I/J = \{\bar{r} = r + J \mid r \in I\}$.

Mengingat $I \subset R$, dapat ditunjukkan bahwa I/J merupakan ideal di R/J (sebagai latihan). Oleh karena itu, terbentuk ring faktor

$$\left(R/J\right) / \left(I/J\right) = \left\{\bar{\bar{r}} = \bar{r} + I/J \mid \bar{r} \in R/J\right\}.$$

Teorema 4

Diberikan sebarang ring R. Jika I dan J masing-masing merupakan ideal di R dengan $J \subset I$, maka

$$\left({}^{R}\!/_{J}\right) \Big/ \left({}^{I}\!/_{J}\right) \cong {}^{R}\!/_{I}.$$

Hint untuk bukti: Dibentuk pengaitan

$$\begin{aligned} f : {}^{R}\!/_{J} &\longrightarrow {}^{R}\!/_{I} \\ r + J &\longmapsto r + I. \end{aligned}$$

Selanjutnya tunjukkan bahwa f merupakan pemetaan dan homomorfisma ring, $\ker(f) = {}^{I}\!/_{J}$, $\mathrm{Im}(f) = {}^{R}\!/_{I}$.

Renungan

- Apakah hubungan antara homomorfisma grup dan homomorfisma ring?
- Sifat-sifat mana dari homomorfisma ring yang mirip dengan sifat homomorfisma grup?
- Sifat-sifat mana dari homomorfisma ring yang berbeda dengan sifat homomorfisma grup?
- Sifat-sifat mana dari homomorfisma ring yang tidak dimiliki oleh homomorfisma grup?
- dan seterusnya.

[1] J.S. Milne, 2017, “Group Theory”, Copyright c 1996–2017 http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf

[2] N. Jackson, 2017, “A Course in Abstract Algebra”, http://homepages.warwick.ac.uk/ maseay/doc/aalg.pdf

[3] A. Machì, 2012, “Groups: An Introduction to Ideas and Methods of the Theory of Groups”, Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London © Springer-Verlag Italia.

[4] W. Keith Nicholson. 2012, “Introduction to abstract algebra”, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, fourth edition, 2012.

[5] Thomas W. Judson , 2012, “Abstract Algebra Theory and Applications”, Stephen F. Austin State University, http://abstract.ups.edu/download/aata-20120811.pdf

[6] KH Fieseler, 2010, “Groups, Rings and Fields”, http://www2.math.uu.se/ khf/dachs.pdf

[7] Landin. J., 2010, An Introduction to Algbraic Structure, Dover Book on Mathematics, New York

[8] John B. Fraleigh, 1999; A First Course in Abstract Algebra; Fourth Edition; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[9] David S. Dummit, and Richard M. Foote, 1999, Abstract Algebra, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York

[10] D.S. Malik, John M. Mordeson, and M.K. Sen, 1998, Fundamental of Abstract, Fourth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[11] I. N. Herstein, 1975, Topics in Algebra, John Wiley and Sons Inc., New York

Kontak Saya

Instagram	: @uhaisnaini
Email	: isnainiuha@ugm.ac.id
Website	: acadstaff.ugm.ac.id/Isnaini
YouTube	: ugm.id/IsnainiU


Thank
you