UNIVERSITAS GADJAH MADA

Kuliah Umum Aljabar - Komunitas Peminat Aljabar - Seri 4 Sesi 1

Ring, Ideal dan Ring faktor

Yeni Susanti

Laboratorium Aljabar

Departemen Matematika, FMIPA UGM

yeni_math@ugm.ac.id

http://yenisusanti.staff.ugm.ac.id/

KERJASAMA:

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Outline

Motivasi Munculnya Definisi Ring (Gelanggang)

Perhatikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $+$.

Berlaku :

(i) (Sifat asosiatif)
Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$.
$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[(x + y) + z = x + (y + z)]$

(ii) (Eksistensi elemen netral)
Terdapat bilangan $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $0 + x = x + 0 = x$.
$(\exists 0 \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})[0 + x = x + 0 = x]$

(iii) (Eksistensi elemen invers)
Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ terdapat $y \in \mathbb{Z}$ sehingga $x + y = y + x = 0$.
$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})[x + y = y + x = 0]$

(iv) (Sifat komutatif)
Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y = y + x$.
$(\forall x, y \in \mathbb{Z})[x + y = y + x]$

Atau dengan kata lain, $(\mathbb{Z}; +)$ merupakan **grup abelian**.

Motivasi Munculnya Definisi Ring

Himpunan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi perkalian $\cdot$ memenuhi:

(Sifat asosiatif)

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$

Atau dengan kata lain, $(\mathbb{Z}; \cdot)$ merupakan **semigrup**.

Motivasi Munculnya Definisi Ring

Terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$, himpunan $\mathbb{Z}$ memenuhi

(i) (Sifat distributif kanan) Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.
$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)]$

(ii) (Sifat distributif kiri) Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$

Sifat lainnya (terhadap perkalian $\cdot$):

a. Terdapat bilangan $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
(Eksistensi elemen identitas, dalam hal ini 1 sebagai elemen identitas.)

b. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$. (komutatif)

Abstraksi

Termotivasi oleh sifat-sifat $\mathbb{Z}$ terhadap dua operasi $+$ dan $\cdot$, dilakukan proses abstraksi sehingga didapat struktur baru yaitu ring.

Definisi Ring

Diberikan himpunan tak kosong R dan dua operasi biner $+$ (yang disebut penjumlahan) dan $\cdot$ (yang disebut perkalian) pada R. Pasangan $(R; +, \cdot)$ disebut ring jika

1. Terhadap operasi penjumlahan $+$

   R1 (Sifat asosiatif)
   $(\forall x, y, z \in R)[(x + y) + z = x + (y + z)]$.

   R2 (Eksistensi elemen netral)
   $(\exists 0_R \in R)(\forall x \in R)[0_R + x = x + 0_R = x]$.
   (Dalam hal ini 0_R sebagai elemen netral)

   R3 (Eksistensi elemen invers)
   $(\forall x \in R)(y \in R)[x + y = y + x = 0_R]$.
   (Elemen y selanjutnya disebut sebagai invers jumlahan x dan dinotasikan $-x$)

   R4 (Sifat komutatif)
   Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$.

Dengan kata lain, $(R; +)$ merupakan grup abelian.

Definisi Ring

2. Terhadap operasi perkalian $\cdot$

   R5 (Sifat assosiatif)

   $(\forall x, y, z \in R)[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)].$

   Dengan kata lain, $(R; \cdot)$ merupakan semigrup.

3. Terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$

   R6 (Sifat distributif kanan)

   $(\forall x, y, z \in R)[(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)]$

   R7 (Sifat distributif kiri)

   $(\forall x, y, z \in R)[x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$

Jadi, $(R; +, \cdot)$ merupakan ring jika:

I $(R; +)$ merupakan grup abelian.

II $(R; \cdot)$ merupakan semigrup.

III R terhadap operasi $+$ dan $\cdot$ memenuhi sifat distributif kanan dan distributif kiri.

	+	·
asosiatif	v	v
komutatif	v	x
elemen netral/identitas	v	x
elemen invers	v	x

Jenis-Jenis Ring

Ring dengan elemen satuan/*ring with identity*

Ring $(R; +, \cdot)$ dengan tambahan sifat : terdapat elemen $1_R \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$, disebut ring dengan elemen satuan.

Ring komutatif/*commutative ring*

Ring $(R; +, \cdot)$ dikatakan komutatif jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$.

Sebarang ring dengan elemen satuan dan memenuhi sifat komutatif disebut ring komutatif dengan elemen satuan (*commutative ring with identity*).

Jenis-Jenis Ring

Ring pembagian/*division ring*

Ring $(R;+,\cdot)$ dengan elemen satuan 1_R disebut **ring pembagian** jika setiap elemen tak nol di R merupakan unit (memiliki invers terhadap operasi perkalian). Dengan kata lain, ring $(R;+,\cdot)$ dengan elemen satuan 1_R disebut ring pembagian jika untuk setiap $0_R \neq x \in R$ terdapat $y \in R$ dengan $x \cdot y = y \cdot x = 1_R$. Elemen y ini selanjutnya disebut sebagai invers perkalian x, dan dinotasikan x^{-1}.

Lapangan/*field*

Ring R disebut lapangan jika R merupakan ring pembagian yang komutatif.

Contoh Ring 1 - Sistem Bilangan

Misalkan $\mathbb{Z}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ berturut-turut adalah himpunan semua bilangan bulat (rasional, real, kompleks). Berlaku : $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Ring $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ semuanya merupakan lapangan.

Contoh Ring 2 - Ring Kelas Ekuivalensi Himpunan Bulat Modulo *n*

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_n$ dan operasi $+$ dan $\cdot$ dengan definisi $+(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$ dan $\cdot(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$ untuk setiap $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$. (Lihat kembali Catatan Teori Grup) Diperoleh ring $(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$ yang bersifat komutatif dan juga memiliki elemen satuan, yaitu $\overline{1}$.

Hint : $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})[x - y = kn]$

Contoh Ring 3 - Ring Matriks Persegi atas Bilangan Real

Diberikan himpunan $M_n(\mathbb{R})$ yang beranggotakan semua matriks berukuran $n \times n$ $(n \geq 2)$ atas $\mathbb{R}$. Himpunan $M_n(\mathbb{R})$ dengan dilengkapi operasi penjumlahan $+$ dan perkalian matriks $\cdot$ sebagai berikut:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \quad \text{dan} \quad (A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

untuk setiap $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, merupakan ring dengan elemen satuan dan tidak komutatif. Elemen satuan di ring $(M_n(\mathbb{R}); +, \cdot)$ tersebut adalah matriks identitas I_n, dengan $(I_n)_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $(I_n)_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Hint : Gunakan sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{R}$ serta konsep kesamaan matriks :

$$(\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})[A = B \Leftrightarrow (\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})(A)_{ij} = (B)_{ij}]$$

Contoh Ring 4 - Ring Polinomial

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial atas bilangan bulat. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian polinomial sebagai berikut: untuk sebarang $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $b(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ di $\mathbb{Z}[x]$

$$a(x) + b(x) := \sum_{i=0}^{maks\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i \quad \text{dan} \quad a(x) \cdot b(x) := \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

dengan

$$c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l,$$

$\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan $i(x) = 1 \in \mathbb{Z}[x]$. (Note : $i(x) = 1 \in \mathbb{Z}$).

Contoh Ring 5 - Ring Fungsi-Fungsi

Diberikan himpunan $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ fungsi}\}$. Bersama-sama dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ dengan definisi

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{dan} \quad (f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

untuk setiap $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, himpunan $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ membentuk ring komutatif dengan elemen satuan. Sebagai elemen netral jumlahannya adalah fungsi konstan bernilai 0, dan sebagai elemen satuannya adalah fungsi konstan bernilai 1. Serta, invers jumlahan fungsi f adalah fungsi $-f$ dengan $(-f)(x) = -(f(x))$.

Hint : Untuk menunjukkan aksioma ring dipenuhi, digunakan sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{R}$, serta konsep kesamaan fungsi : $(\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}})[f = g \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})[f(x) = g(x)]]$

Contoh Ring 6 - Ring dari Grup

Diberikan sebarang grup abelian $(G;+)$ dengan elemen netral 0_G. Jika pada G didefinisikan operasi perkalian $\cdot$ dengan $x \cdot y = 0_G$ untuk setiap $x, y \in G$, maka $(G;+,\cdot)$ merupakan ring komutatif.

Contoh Ring 7 - Ring Homomorfisma Grup

Diberikan sebarang grup abelian $(G;+)$ dan $End(G) = \{f : G \to G | f \text{ homomorfisma grup}\}$. Telah diketahui bahwa $(End(G);+)$ merupakan grup abelian. Dengan dilengkapi dengan operasi komposisi fungsi $\circ$:

$$(\forall f, g \in End(G))(\forall x \in G)(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

pada $End(G)$ terbentuk ring $(End(G);+,\circ)$ yang memiliki elemen satuan, yaitu fungsi identitas.

Contoh Ring 8 - Ring Himpunan Kuasa

Diberikan sebarang himpunan tak kosong A dan himpunan kuasa $2^A = \{X | X \subseteq A\}$. Selanjutnya pada 2^A didefinisikan operasi $+$ dan $\cdot$ dengan definisi sebagai berikut

$$X + Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \qquad X \cdot Y := X \cap Y$$

untuk setiap $X, Y \in 2^A$. Didapat : $(2^A; +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan (Sebagai elemen netral jumlahan adalah $\emptyset$ dan sebagai elemen satuan adalah A.)

Definisi Pengurangan dan Pangkat

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$ dan sebarang $x, y \in R$.

Operasi pengurangan antara x dan y, dinotasikan dengan $x - y$, didefinisikan sebagai

$$x - y := x + (-y)$$

dengan $-y$ menyatakan invers y terhadap operasi penjumlahan di R.

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$, $x \in R$ dan sebarang bilangan asli n. Elemen x dipangkatkan n, dinotasikan dengan x^n, didefinsikan sebagai

$$x^n := x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \text{ (sebanyak } n).$$

Lebih lanjut, dalam hal R merupakan ring dengan elemen satuan dan x adalah elemen unit, x^{-n} didefinisikan sebagai

$$x^{-n} := x^{-1} \cdot x^{-1} \ldots x^{-1} \text{ (sebanyak } n).$$

Sifat-Sifat Operasi di Ring

Diberikan ring $(R;+,\cdot)$. Untuk sebarang $x, y, z, y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$ dan sebarang bilangan asli m dan n, berlaku:

(i) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

(ii) $(x+y)^2 = x^2 + y \cdot x + x \cdot y + y^2$

(iii) $x \cdot (y_1 + \ldots + y_n) = (x \cdot y_1) + \ldots + (x \cdot y_n)$

(iv) $x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z)$ dan $(x - y) \cdot z = (x \cdot z) - (y \cdot z)$

(v) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ dan $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ dan $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(vi) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ dan $(x^m)^n = x^{mn}$

(vii) jika $x \cdot y = y \cdot x$ maka $x^m \cdot y^n = y^n \cdot x^m$ dan $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

BUKTI

(i) Untuk setiap $x \in R$ berlaku $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

Ambil sebarang $x \in R$, berlaku $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$ (dengan sifat R2 dan R6). Dengan menambahkan $-(0 \cdot x)$ pada kedua ruas, didapat

$$0 = -(0 \cdot x) + 0 \cdot x = -(0 \cdot x) + ((0 \cdot x) + (0 \cdot x)) =$$

$$(-(0 \cdot x) + (0 \cdot x)) + (0 \cdot x) = 0 + (0 \cdot x) = 0 \cdot x.$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan $x \cdot 0 = 0$.

BUKTI

(ii) Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $(x+y)^2 = x^2 + y \cdot x + x \cdot y + y^2$

Ambil sebarang $x, y \in R$. Berlaku:

$$(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y) = [(x+y) \cdot x] + [(x+y) \cdot y]$$

$$= [x \cdot x + y \cdot x] + [x \cdot y + y \cdot y] = x^2 + y \cdot x + x \cdot y + y^2.$$

BUKTI

(iii) Untuk setiap $x, y_1, \ldots y_n \in R$ berlaku
$x \cdot (y_1 + \ldots + y_n) = (x \cdot y_1) + \ldots (x \cdot y_n)$

Ambil sebarang $x, y_1, \ldots y_n \in R$. Diperoleh

$$x \cdot (y_1 + \ldots + y_n) = x \cdot (y_1 + (y_2 + \ldots + y_n)) =$$

$$(x \cdot y_1) + (x \cdot (y_2 + (y_3 + \ldots + y_n))) = \ldots = (x \cdot y_1) + (x \cdot y_2) + ... + (x \cdot y_n).$$

BUKTI

(iv) Untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku $x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z)$ dan $(x - y) \cdot z = (x \cdot z) - (y \cdot z)$.

Ambil sebarang $x, y, z \in R$. Berlaku

$$x \cdot (y - z) + (x \cdot z) = x \cdot ((y - z) + z) = x \cdot (y + (-z + z)) =$$

$$x \cdot (y + 0) = x \cdot y$$

sehingga

$$x \cdot (y - z) = (x \cdot (y - z) + x \cdot z) - (x \cdot z) = (x \cdot y) - (x \cdot z).$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan $(x - y) \cdot z = (x \cdot z) - (y \cdot z)$.

BUKTI

(v) Untuk setiap $x, y \in R$, berlaku $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ dan $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ dan $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Ambil sebarang $x, y \in R$. Berlaku
$((-x) \cdot y) + (x \cdot y) = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$
Jadi, $(-x) \cdot y$ adalah invers jumlahannya $x \cdot y$, atau dengan kata lain, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Akibatnya,

$$(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

MOTIVASI DEFINISI SUBRING

Diperhatikan ring $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ dan himpunan $2\mathbb{Z}=\{2z|z\in\mathbb{Z}\}$ yang beranggotakan semua bilangan bulat genap. Berlaku:

- $(2\mathbb{Z};+)$ merupakan subgrup di dalam grup $(\mathbb{Z};+)$ dan komutatif (sifat komutatif ini diturunkan dari sifat komutatif $+$ di $\mathbb{Z}$)
- $(2\mathbb{Z};\cdot)$ merupakan semigrup
- sifat distributif kiri dan distributif kanan yang diturunkan oleh $\mathbb{Z}$ ke $2\mathbb{Z}$

Jadi, $(2\mathbb{Z};+,\cdot)$ merupakan ring di dalam ring $(\mathbb{Z};+,\cdot)$.

MOTIVASI DEFINISI SUBRING

Sementara itu, perhatikan himpunan $2\mathbb{Z}+1=\{2z+1|z\in\mathbb{Z}\}$ yang beranggotakan semua bilangan bulat ganjil.

Jelas bahwa $(2\mathbb{Z}+1;+)$ bukan merupakan grup, sebab $1,3\in 2\mathbb{Z}+1$ tetapi $1+3\notin 2\mathbb{Z}+1$. Dengan demikian $(2\mathbb{Z}+1;+,\cdot)$ bukan merupakan ring di dalam $(\mathbb{Z};+,\cdot)$

SUBRING

Definisi Subring

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$. Himpunan tak kosong $S \subseteq R$ disebut subring di dalam R jika terhadap dua operasi biner yang sama seperti pada R, S merupakan ring, i.e. $(S; +, \cdot)$ merupakan ring.

Jadi, himpunan bagian tak kosong S di dalam ring $(R; +, \cdot)$ merupakan subring jika

I. $(S; +)$ merupakan grup abelian

II. $(S; \cdot)$ merupakan semigrup

III. S terhadap dua operasi $+$ dan $\cdot$ memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan.

Himpunan bagian tak kosong S di dalam ring $(R;+,\cdot)$ merupakan subring jika

a. $(S;+)$ merupakan grup $\Leftrightarrow (\forall x,y\in S)[x-y\in S]$
b. $(S;\cdot)$ merupakan grupoid $\Leftrightarrow (\forall x,y\in S)[x\cdot y\in S]$
c. S terhadap operasi $+$ memenuhi sifat komutatif (selalu dipenuhi)
d. S terhadap operasi $\cdot$ memenuhi sifat asosiatif (selalu dipenuhi)
e. S terhadap operasi $+$ dan $\cdot$ memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan (selalu dipenuhi)

Syarat Perlu dan Cukup Subring

Teorema

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$. Himpunan tak kosong $S \subseteq R$ merupakan subring di dalam R jika dan hanya jika

$$(\forall x, y \in S)[x - y \in S \quad \text{dan} \quad x \cdot y \in S]$$

Contoh Subring 1

Diperhatikan kembali ring $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}; +, \cdot)$. Himpunan

$$S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | (\forall x, y \in \mathbb{R})[f(x) = f(y)]\}$$

yang beranggotakan semua fungsi konstan di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, membentuk subring di dalam $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Jelas bahwa $S \neq \emptyset$, sebab fungsi $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dengan $f(x) = 0_R$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ berada di S. Ambil sebarang $f, g \in S$ dan ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$. Berlaku $f(x) = f(y)$ dan $g(x) = g(y)$, sehingga

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = f(y) - g(y) = (f - g)(y)$$

dan

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = f(y)g(y) = (f \cdot g)(y).$$

Terbukti $f - g, f \cdot g \in S$. Jadi $(S; +, \cdot)$ merupakan subring di dalam $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}; +, \cdot)$

Contoh Subring 2

Himpunan

$$U_n(\mathbb{R}) = \{X | X \in M_n(\mathbb{R}) \text{ dan } (X)_{ij} = 0 \text{ untuk semua } i > j, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

yang beranggotakan semua matriks segitiga atas di $M_n(\mathbb{R})$ merupakan subring di dalam ring $(M_n(\mathbb{R}); +, \cdot)$.

Contoh Subring 3

Untuk sebarang bilangan asli k, himpunan $k\mathbb{Z} = \{kz | z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subring di $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

Teorema

Diberikan ring $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$. Sebarang subring di $\mathbb{Z}$ berbentuk $k\mathbb{Z}$ untuk suatu bilangan asli k.

Contoh Subring 4

Himpunan $x \cdot \mathbb{Z}[x] = \{x \cdot p(x) | p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ yang beranggotakan semua polinomial di $\mathbb{Z}[x]$ dengan suku konstan nol, merupakan subring di dalam ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$.

Jelas bahwa $x \cdot \mathbb{Z}[x] \neq \emptyset$. Ambil sebarang $x \cdot p(x), x \cdot q(x) \in x \cdot \mathbb{Z}[x]$. Karena $p(x), q(x), x \in \mathbb{Z}[x]$ maka $p(x) - q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan $p(x) \cdot x \cdot q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Akibatnya berlaku

$$x \cdot p(x) - x \cdot q(x) = x \cdot (p(x) - q(x)) \in x \cdot \mathbb{Z}[x]$$

dan

$$(x \cdot p(x)) \cdot (x \cdot q(x)) = x \cdot (p(x) \cdot x \cdot q(x)) \in x \cdot \mathbb{Z}[x].$$

Jadi $x \cdot \mathbb{Z}[x]$ merupakan subring di dalam $\mathbb{Z}[x]$.

Contoh Bukan Subring

Pandang kembali ring dengan elemen satuan $(M_n(\mathbb{R}); +, \cdot)$. Selanjutnya, diperhatikan himpunan

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} = 0\}.$$

Mudah dilihat bahwa $S \neq \emptyset$. Namun secara umum S bukan subring di $M_n(\mathbb{R})$. Ambil $n = 2$. Terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dengan $A \in S$ tetapi $AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin S$. Jadi, S bukan subring di dalam $(M_n(\mathbb{R}); +, \cdot)$.

Irisan Dua Subring merupakan Subring

Teorema

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$ dan dua subring S dan T di dalam R. Berlaku : $S \cap T$ merupakan subring di dalam R.

Bukti: Jelas $S \cap T \neq \emptyset$, sebab setidaknya ada $0_R \in S \cap T$. Ambil sebarang $x, y \in S \cap T$. Jelas $x, y \in S$ dan $x, y \in T$. Karena S dan T masing-masing merupakan subring, maka $x - y \in S$ dan $x - y \in T$ serta $x \cdot y \in S$ dan $x \cdot y \in T$. Jadi, $x - y \in S \cap T$ dan $x \cdot y \in S \cap T$. Jadi, $S \cap T$ merupakan subring. $\square$

SIFAT-SIFAT SUBRING

Catatan 1

- Untuk sebarang ring R, R sendiri dan $\{0_R\}$ masing-masing merupakan subring di dalam R. Jadi, setiap ring memuat subring.
- Sebarang subring di dalam ring komutatif, juga bersifat komutatif.
- Misalkan $(R; +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan dan misalkan S adalah subring di dalam R. Secara umum, R belum tentu memiliki elemen satuan. Sebagai contoh adalah ring $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ dan subring $(2\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

Catatan 2

Misalkan $(R;+,\cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan, dan S adalah subring di dalam R yang juga memiliki elemen satuan. Elemen satuan R belum tentu sama dengan elemen satuan S. Sebagai contoh adalah ring $(M_2(\mathbb{R});+,\cdot)$ dan subring $(S;+,\cdot)$ dengan $S=\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\}$ di dalam $M_2(\mathbb{R})$. Dua ring R dan S tersebut memiliki elemen satuan yang berbeda. Elemen satuan $M_2(\mathbb{R})$ adalah matriks identitas $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sedangkan elemen satuan S adalah matriks $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

IDEAL : ideal kiri - ideal kanan - ideal

Definisi

Diberikan ring $(R;+,\cdot)$ dan himpunan $\emptyset \neq I \subseteq R$. Himpunan I disebut ideal kiri (ideal kanan) di dalam R jika dipenuhi :

(i) untuk setiap $x, y \in I$ berlaku $x - y \in I$
(dkl. $(I;+)$ merupakan subgrup di dalam $(R;+)$)

(ii) untuk setiap $r \in R$ dan $x \in I$ berlaku $rx \in I$ $(xr \in I)$
atau dengan kata lain, untuk setiap $r \in R$ berlaku $rI \subseteq I$ $(Ir \subseteq I)$

Himpunan I disebut ideal di dalam R jika I merupakan ideal kiri dan sekaligus ideal kanan di R.

Contoh Terkait Ideal

Contoh 1

Untuk sebarang ring R, himpunan $\{0_R\}$ dan R sendiri, masing-masing merupakan ideal di dalam R, dan keduanya disebut sebagai ideal-ideal trivial.

Contoh 2

Himpunan $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{Z}_4; +, \cdot)$.

Contoh 3

Diberikan ring $(M_2(\mathbb{R}); +, \cdot)$. Himpunan $I = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$ merupakan ideal kiri di $M_2(\mathbb{R})$ tetapi bukan ideal kanan, sementara himpunan $J = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$ merupakan ideal kanan tetapi bukan ideal kiri di $M_2(\mathbb{R})$.

Contoh 4

Ring $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ bukan merupakan ideal di ring $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ maupun di ring $(\mathbb{R}; +, \cdot)$. Ring $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ bukan merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{R}; +, \cdot)$.

Contoh 5

Untuk sebarang bilangan asli k, ring $(k\mathbb{Z}; +, \cdot)$ merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ tetapi bukan merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

Sifat Ideal

Teorema

Diberikan ring-ring R, S, T dengan R merupakan subring di S dan S subring di T. Jika R merupakan ideal di dalam T maka R merupakan ideal di dalam S.

Bukti:

Ambil sebarang $s \in S$ dan $r \in R$. Karena $S \subseteq T$ dan R merupakan ideal di T, maka $sr, rs \in R$. Jadi, R merupakan ideal di S. $\square$

Namun, jika R merupakan ideal di dalam S belum tentu R merupakan ideal di dalam T. Sebagai contoh, ring $(k\mathbb{Z}; +, \cdot)$ merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ tetapi bukan merupakan ideal di dalam ring $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$

Sifat Ideal

Teorema

Diberikan sebarang ring R. Jika I merupakan ideal di R maka I merupakan subring di R.

Cukup jelas dari definisi ideal.

Teorema

Diberikan ring R dengan elemen satuan 1_R. Jika I merupakan ideal di R dan $1_R \in I$ maka $I = R$.

Bukti:

Jelas bahwa $I \subseteq R$. Ambil sebarang $r \in R$, berlaku $r = 1_R \cdot r$. Oleh karena $1_R \in I$ dan I merupakan ideal, dipunyai $r = 1_R \cdot r \in I$. Jadi, $R \subseteq I$ sehingga $I = R$.

Sifat Ideal

Teorema - Irisan dua ideal merupakan ideal

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$ dan dua ideal kiri (ideal kanan, ideal) I dan J di dalam R. Berlaku $I \cap J$ juga merupakan ideal kiri (ideal kanan, ideal) di R.

Bukti :

Misalkan I dan J adalah ideal-ideal kiri di R. Ambil sebarang $x, y \in I \cap J$. Didapat $x, y \in I$ dan $x, y \in J$. Karena I dan J ideal-ideal kiri di R, maka jelas $x - y \in I$ dan $x - y \in J$ sehingga $x - y \in I \cap J$. (Terbukti aksioma (i) ideal kiri). Lebih lanjut, untuk sebarang $r \in R$, berlaku $rx \in I$ dan $rx \in J$ sehingga $rx \in I \cap J$. (Terbukti aksioma (ii) ideal kiri). Dengan demikian terbukti $I \cap J$ merupakan ideal kiri. Bukti untuk I dan J ideal kanan (ideal), sejalan. $\square$

Sifat Ideal

Teorema - Jumlahan dua ideal merupakan ideal

Misalkan $(R; +, \cdot)$ ring dan misalkan I dan J merupakan dua ideal di R. Himpunan $I + J := \{x + y | x \in I, y \in J\}$ merupakan ideal di R. Lebih lanjut, $I \cup J \subseteq I + J$.

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in I + J$. Misalkan $x = x_1 + x_2$ dan $y = y_1 + y_2$ dengan $x_1, y_1 \in I$ dan $x_2, y_2 \in J$. Berlaku $x_1 - y_1 \in I$ dan $x_2 - y_2 \in J$ sehingga $x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in I + J$. Lebih lanjut, untuk sebarang $r \in R$ berlaku $rx_1 \in I$ dan $rx_2 \in J$ sehingga $rx = r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 \in I + J$. Dengan demikian terbukti $I + J$ ideal di dalam R. Tinggal ditunjukkan $I \cup J \subseteq I + J$. Ambil sebarang $x \in I \cup J$. Berarti $x \in I$ atau $x \in J$. Jika $x \in I$, maka $x = x + 0 \in I + J$ sebab $0 \in J$. Jika $x \in J$, maka $x = 0 + j \in I + J$ sebab $0 \in I$. $\square$

Grup Faktor $(R/I;+)$ ke Ring Faktor $(R/I;+,\cdot)$

Misalkan $(R;+,\cdot)$ ring dan I subring di R. Jelas bahwa $(R;+)$ dan $(I;+)$ masing-masing merupakan grup abelian. Dari Teori Grup telah jelas bahwa $(R/I;+)$ dengan $R/I = \{r+I|r\in R\}$ merupakan grup (grup faktor) abelian, dengan $+$ didefinisikan sebagai berikut :

$$(r+I)+(s+I) := (r+s)+I$$

untuk semua $r+I, s+I \in R/I$.

Bisakah pada R/I didefinisikan perkalian $\cdot$

$$\cdot : R/I \times R/I \to R/I$$

dengan

$$\cdot(r+I, r'+I) = (r+I)\cdot(r'+I) := rr'+I$$

untuk setiap $r+I, r'+I \in R/I$? Catatan : Telah jelas $rr'+I \in R/I$.

Grup Faktor $(R/I;+)$ ke Ring Faktor $(R/I;+,\cdot)$

Apakah $\cdot$ ini *well-defined*?

- Ambil sebarang $(r_1+I, r_2+I), (r_1'+I, r_2'+I) \in R/I \times R/I$ dengan $(r_1+I, r_2+I) = (r_1'+I, r_2'+I)$ jhj $r_1+I = r_1'+I$ dan $r_2+I = r_2'+I$ jhj $r_1 - r_1' \in I$ dan $r_2 - r_2' \in I$ jhj $r_1 - r_1' = x_1$ dan $r_2 - r_2' = x_2$ untuk suatu $x_1, x_2 \in I$.
- Akan dilihat apakah $\cdot(r_1+I, r_2+I) = \cdot(r_1'+I, r_2'+I)$ jhj $r_1r_2 + I = r_1'r_2' + I$ jhj $r_1r_2 - r_1'r_2' \in I$.
- Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r_1r_2 - r_1'r_2' &= (x_1+r_1')(x_2+r_2') - r_1'r_2' \\ &= x_1x_2 + x_1r_2' + r_1'x_2 + r_1'r_2' - r_1'r_2' \\ &= x_1x_2 + x_1r_2' + r_1'x_2 \end{aligned}$$

dengan $x_1x_2 \in I$ sebab I subring. Akan tetapi, belum ada jaminan bahwa $x_1r_2', r_1'x_2 \in I$. Dalam keadaan I berupa ideal, akan berlaku $x_1r_2', r_1'x_2 \in I$ sehingga $r_1r_2 - r_1'r_2' \in I$, i.e. perkalian $\cdot$ *well-defined*.

Ring Faktor

Teorema

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$ dan ideal I di dalam R. Terhadap operasi biner penjumlahan $+$ dan operasi biner perkalian $\cdot$ pada R/I dengan

$$(x + I) + (y + I) := x + y + I \quad \text{dan} \quad (x + I) \cdot (y + I) := xy + I$$

untuk setiap $x + I, y + I \in R/I$, $(R/I, +, \cdot)$ merupakan ring, dan disebut sebagai ring faktor.

Contoh Ring Faktor

Diberikan ring komutatif ($\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}; +, \cdot$). Jelas bahwa $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ merupakan ideal. Koset-koset di $\mathbb{Z}_4/I$ adalah :

$\overline{0} + I = \{\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}, \overline{0} + \overline{2} = \overline{2}\} = \{\overline{0}, \overline{2}\} = I$

$\overline{1} + I = \{\overline{1} + \overline{0} = \overline{1}, \overline{1} + \overline{2} = \overline{3}\} = \{\overline{1}, \overline{3}\} = I^c$

$\overline{2} + I = \{\overline{2} + \overline{0} = \overline{2}, \overline{2} + \overline{2} = \overline{0}\} = \{\overline{0}, \overline{2}\} = I$

$\overline{3} + I = \{\overline{3} + \overline{0} = \overline{3}, \overline{3} + \overline{2} = \overline{1}\} = \{\overline{1}, \overline{3}\} = I^c$

Jadi, $\overline{0} + I = \overline{2} + I$ dan $\overline{1} + I = \overline{3} + I$, sehingga

$$\mathbb{Z}_4/I = \{\overline{0} + I = \overline{2} + I, \overline{1} + I = \overline{3} + I\} = \{I, I^c\}$$

Operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_4/I$

Tabel operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_4/I$

$+$	$\overline{0}+I=I$	$\overline{1}+I=I^c$
$\overline{0}+I=I$	I	I^c
$\overline{1}+I=I^c$	I^c	I

Tabel operasi perkalian di $\mathbb{Z}_4/I$

$\cdot$	$\overline{0}+I=I$	$\overline{1}+I=I^c$
$\overline{0}+I=I$	I	I
$\overline{1}+I=I^c$	I	I^c

Contoh Ring Faktor

Pandang ring $T_2(\mathbb{Z}_2) = \{\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{a_3} \end{pmatrix} | \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3} \in \mathbb{Z}_2\}$.

Himpunan $\mathcal{I} = \{\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} | \overline{a} \in \mathbb{Z}_2\}$ merupakan ideal di dalam $T_2(\mathbb{Z}_2)$, sebab $\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq T_2(\mathbb{Z}_2)$ dan untuk sebarang

$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$ dan untuk sebarang

$X = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{a_3} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{Z}_2)$ berlaku $A - B = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a-b} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$.

Selanjutnya, berlaku pula $XA = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a_1 a} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$ dan

$AX = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{aa_3} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$.

Ring Faktor $T_2(\mathbb{Z}_2)/\mathcal{I}$

Jelas bahwa ring $T_2(\mathbb{Z}_2)$ beranggotakan 8 elemen dan ideal $\mathcal{I}$ beranggotakan 2 elemen. Sehingga terbentuk 4 kelas (elemen) di dalam ring faktor $T_2(\mathbb{Z}_2)/\mathcal{I}$, sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} + \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\}$$

Dengan demikian diperoleh ring faktor :

$$T_2(\mathbb{Z}_2)/\mathcal{I} = \left\{\left\{\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right\}\right\}$$

Bandingkan dengan ring

$$T_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right\}$$

Ideal yang dibangun oleh himpunan

Misalkan $(R;+,\cdot)$ merupakan ring dan misalkan $\emptyset \neq X \subseteq R$ merupakan sebarang himpunan di dalam R. Jelas bahwa selalu dapat ditemukan ideal di dalam R yang memuat X, sebab R sendiri merupakan ideal di dalam R. Sekarang, misalkan $\mathcal{I}_X$ merupakan semua ideal-ideal di dalam R yang memuat X, yaitu

$$\mathcal{I}_X = \{I | I \text{ ideal di dalam } R, \text{ dan } X \subseteq I\}.$$

Misalkan pula $< X >$ menyatakan irisan semua ideal di dalam $\mathcal{I}_X$, atau dengan kata lain

$$< X > := \bigcap_{I \in \mathcal{I}_X} I.$$

B

Ideal terkecil yang memuat himpunan X

Teorema

Misalkan $(R;+,\cdot)$ merupakan ring dan misalkan $\emptyset \neq X \subseteq R$. Berlaku: $< X >$ merupakan ideal terkecil yang memuat X.

Bukti: Misalkan $\mathcal{I}_X$ merupakan semua ideal-ideal di dalam R yang memuat X, yaitu

$$\mathcal{I}_X = \{I | I \text{ ideal di dalam } R, \text{ dan } X \subseteq I\}.$$

Mudah dibuktikan bahwa $< X > := \bigcap_{I \in \mathcal{I}_X} I$ merupakan ideal. Lebih lanjut, karena setiap $I \in \mathcal{I}_X$ memuat X, maka irisan semua $I \in \mathcal{I}_X$, yaitu $< X >$ juga memuat X. Misalkan J merupakan sebarang ideal yang memuat X. Jelas $J \in \mathcal{I}_X$ sehingga $< X > \subseteq J$. Jadi $< X >$ merupakan ideal terkecil yang memuat X. $\square$

Selanjutnya, ideal $< X >$ disebut sebagai ideal yang dibangun oleh himpunan X. Dalam hal $< X > = R$, ring R dikatakan dibangun oleh X.

Bentuk Eksplisit Elemen $< X >$

Misalkan

$$\mathcal{S}_X := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i r_i' + \sum_{j=1}^{k} t_j y_j + \sum_{l=1}^{p} z_l s_l + \sum_{q=1}^{m} k_q w_q$$

$$n, k, p, m \in \mathbb{N}, k_q \in \mathbb{Z}, r_i, r_i', t_j, s_l \in R, x_i, y_j, z_l, w_q \in X\}$$

Teorema

Diberikan ring $(R; +, \cdot)$ dan sebarang himpunan tak kosong $X \subseteq R$. Berlaku

$$< X > = \mathcal{S}_X.$$

Bagaimana bentuk $\mathcal{S}_X$ dalam hal :

(i) R merupakan ring komutatif?

(ii) R merupakan ring dengan elemen satuan?

(iii) R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan?

Dalam hal R merupakan ring komutatif, $\mathcal{S}_X$ akan berbentuk

$$\mathcal{S}_X = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{j=1}^{m} k_j y_j | n, m \in \mathbb{N}, r_i \in R, k_j \in \mathbb{Z}, x_i, y_j \in X, i = 1, \ldots, n,$$

$$j = 1, \ldots, m\}.$$

Dalam hal R merupakan ring dengan elemen satuan, $\mathcal{S}_X$ akan berbentuk

$$\mathcal{S}_X = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i r_i' | n \in \mathbb{N}, r_i, r_i' \in R, x_i \in X, i = 1, \ldots, n\}.$$

Dalam hal R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, $\mathcal{S}_X$ akan berbentuk

$$\mathcal{S}_X = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i | n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X, i = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema

Diberikan ring komutatif R. Untuk sebarang dua ideal I, J di dalam R berlaku $< I \cup J >= I + J$. (Dengan kata lain, ideal terkecil yang memuat gabungan I dan J adalah ideal $I + J$.)

Bukti: Telah dibuktikan bahwa $I + J$ merupakan ideal dan $I \cup J \subseteq I + J$. Dengan demikian tinggal menunjukkan bahwa $I + J$ merupakan ideal terkecil yang memuat $I \cup J$. Ambil sebarang ideal K yang memuat $I \cup J$. Akan dibuktikan $I + J \subseteq K$. Ambil sebarang $u \in I + J$. Misalkan $u = x + y$ dengan $x \in I$ dan $y \in J$. Jelas $x, y \in K$ sebab $I \cup J \subseteq K$. Karena K ideal, $u = x + y \in K$. Terbukti $I + J \subseteq K$. $\square$

Referensi

[1] John B. Fraleigh, 1999; A First Course in Abstract Algebra; Fourth Edition; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[2] David S. Dummit, and Richard M. Foote, 1999, Abstract Algebra, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York

[3] D.S. Malik, John M. Mordeson, and M.K. Sen, 1998, Fundamental of Abstract, Fourth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[4] I. N. Herstein, 1975, Topics in Algebra, John Wiley and Sons Inc., New York

Kontak Saya

Instagram	: ariyenisilinsimoru
Email	: yeni_math@ugm.ac.id
Website	: yenisusanti.staff.ugm.ac.id
	: acadstaff.ugm.ac.id/yeni
YouTube	: yeni math ugm
	: mom silinsimo

Thank you