UNIVERSITAS GADJAH MADA

Kuliah Umum Aljabar Komunitas Peminat Aljabar

Seri 4 Sesi 4

Sabtu, 21 November 2020

Ring Polinomial atas Lapangan, Daerah Ideal Utama (DIU), dan Daerah Euclid (DE).

Sri Wahyuni

Laboratorium Aljabar,

Departemen Matematika, FMIPA UGM

swahyuni@ugm.ac.id

KERJASAMA:

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Outline

1. Ring Polinomial Atas Lapangan ($F[x]$)
2. Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa
3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

1. Ring Polinomial Atas Lapangan ($F[x]$)
2. Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa
3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

1. Ring Polinomial Atas Lapangan ($F[x]$)

Motivasi: Dari Contoh 4 (KUA KPA Seri 4 Sesi 1 oleh Bu Yeni)

Jika diberikan himpunan
$\mathbb{Z}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial atas bilangan bulat.
Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian polinomial sebagai berikut: untuk sebarang $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $b(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ di $\mathbb{Z}[x]$

$$a(x) + b(x) := \sum_{i=0}^{maks\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i \quad \text{dan} \quad a(x) \cdot b(x) := \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

dengan $c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$.

$\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan $i(x) = 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
(Note : $i(x) = 1 \in \mathbb{Z}$).

Ilustrasi Operasi penjumlahan.

Sudah kita ketahui dari sekolah menengah bahwa jika dipunyai dua fungsi kuadrat $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ dengan koefisien bilangan real $\mathbb{R}$, maka kita dapat menjumlahkannya yakni diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \end{aligned}$$

yang juga merupakan fungsi kuadrat dengan koefisien bilangan real $\mathbb{R}$.

Ilustrasi Operasi perkalian

Selain itu, dari sekolah menengah, kita dapat juga mengalikannya yakni diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\
&= a_0 \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + a_1 x \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\
&\quad + a_2 x^2 \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\
&= (a_0 b_0) + (a_0 b_1) x + (a_0 b_2) x^2 \\
&\quad + (a_1 b_0) x + (a_1 b_1) x^2 + (a_1 b_2) x^3 \\
&\quad + (a_2 b_0) x^2 + (a_2 b_1) x^3 + (a_2 b_2) x^4 \\
&= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\
&\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x^3 + (a_2 b_2) x^4.
\end{aligned}
$$

Operasi konvolusi

Dapat disimpulkan bahwa $f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$ dengan

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0, \\ c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ c_3 &= a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \\ c_4 &= a_2 \cdot b_2. \end{aligned}$$

Secara umum dapat dituliskan bahwa

$$c_k = a_0 \cdot b_{k-0} + a_1 \cdot b_{k-1} + \cdots + a_k \cdot b_{k-k} = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}.$$

Kemudian, ring $\mathbb{Z}$ digeneralisasi ke sebarang ring komutatif dengan elemen satuan $(R; +, \cdot)$, untuk mendapatkan ring baru $(R[x]; +, \cdot)$.

- Diberikan sebarang ring komutaitif dengan elemen satuan $(R; +, \cdot)$.
- Dibentuk $R[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial atas ring R.

Kemudian, ring $\mathbb{Z}$ digeneralisasi ke sebarang ring komutatif dengan elemen satuan $(R; +, \cdot)$, untuk mendapatkan ring baru $(R[x]; +, \cdot)$.

- Diberikan sebarang ring komutaitif dengan elemen satuan $(R; +, \cdot)$.
- Dibentuk $R[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial atas ring R.
- Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian polinomial sebagai berikut:
  untuk sebarang $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $b(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ di $R[x]$

$$a(x) + b(x) := \sum_{i=0}^{maks\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i \quad \text{dan} \quad a(x) \cdot b(x) := \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

  dengan $c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$,

Dapat ditunjukkan bahwa .....

1. $(R[x], +)$ merupakan grup abelian, dengan elemen netral adalah
$$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x_3 + \cdots = (0, 0, 0, \cdots).$$
2.
   (a) operasi $\cdot$ tertutup di $R[x]$,
   (b) operasi $\cdot$ bersifat asosiatif,
   (c) operasi $\cdot$ bersifat komutatif,
   (d) terhadap operasi $\cdot$ $R[x]$ mempunyai elemen satuan $p(x) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x_3 + \cdots = (1, 0, 0, \cdots)$.
3. berlaku sifat distribusi kiri dan kanan.

Dapat ditunjukkan bahwa .....

1. $(R[x], +)$ merupakan grup abelian, dengan elemen netral adalah
$$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x_3 + \cdots = (0, 0, 0, \cdots).$$
2. (a) operasi $\cdot$ tertutup di $R[x]$,
   (b) operasi $\cdot$ bersifat asosiatif,
   (c) operasi $\cdot$ bersifat komutatif,
   (d) terhadap operasi $\cdot$ $R[x]$ mempunyai elemen satuan $p(x) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x_3 + \cdots = (1, 0, 0, \cdots).$
3. berlaku sifat distribusi kiri dan kanan.

Jadi: dari ring R terbentuk, ring $R[x]$. Selanjutnya ring $(R[x], +, \cdot)$ disebut **ring suku banyak atas ring R.**

Contoh-contoh ring polinomial

1. Jika $R = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ lapangan bilangan real, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{R}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$.

Contoh-contoh ring polinomial

1. Jika $R = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ lapangan bilangan real, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{R}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$.
2. Jika $R = (\mathbb{C}; +, \cdot)$ lapangan bilangan kompleks, maka terbentuk ring polinomial
$\mathbb{C}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{C}$.

Contoh-contoh ring polinomial

1. Jika $R = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ lapangan bilangan real, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{R}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$.
2. Jika $R = (\mathbb{C}; +, \cdot)$ lapangan bilangan kompleks, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{C}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{C}$.
3. Jika $R = (\mathbb{Z}_6; +, \cdot)$ ring bilangan bulat modulo 6, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{Z}_6[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}_6, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{Z}_6$.

Contoh-contoh ring polinomial

1. Jika $R = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ lapangan bilangan real, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{R}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$.
2. Jika $R = (\mathbb{C}; +, \cdot)$ lapangan bilangan kompleks, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{C}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{C}$.
3. Jika $R = (\mathbb{Z}_6; +, \cdot)$ ring bilangan bulat modulo 6, maka terbentuk ring polinomial $\mathbb{Z}_6[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}_6, i = 1, 2, \ldots, n\}$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{Z}_6$.
4. Secara umum: setiap kali kita mempunyai ring komutatif $(R : +, \cdot)$ dengan elemen satuan selalu dapat dibentuk ring baru yakni ring polinomial $R[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Apa kelebihan ring polinomial $F[x]$ jika kita bekerja pada kasus yang sangat khusus yakni $(F; +, \cdot)$ merupakan lapangan?

Untuk itu diperlukan beberapa definisi

- derajat polinomial,
- relasi membagi habis atas polinomial,
- polinomial tak tereduksi.

Derajat (*degree*) suatu polinomial.

Definisi 1

Diberikan sebarang ring R dan $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, suku banyak di $R[x]$. Bilangan bulat terbesar n dengan $a_n \neq 0$ disebut ***derajat*** *(degree) dari $f(x)$, dinotasikan $\deg(f(x))$, dan a_n disebut* **leading coefficient** *dari $f(x)$. Misalkan R mempunyai elemen satuan 1_R. Suku banyak $f(x)$ disebut* ***suku banyak monik*** *(monic polynomial) jika $f(x)$ mempunyai leading coefficient $a_n = 1_R$.*

Derajat (*degree*) suatu polinomial.

Definisi 1

Diberikan sebarang ring R dan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, suku banyak di $R[x]$. Bilangan bulat terbesar n dengan $a_n \neq 0$ disebut ***derajat*** *(degree) dari $f(x)$, dinotasikan $\deg(f(x))$, dan a_n disebut* **leading coefficient** *dari $f(x)$. Misalkan R mempunyai elemen satuan 1_R. Suku banyak $f(x)$ disebut* ***suku banyak monik*** *(monic polynomial) jika $f(x)$ mempunyai leading coefficient $a_n = 1_R$.*

Berdasarkan Definisi 1 di atas, mudah dipahami bahwa untuk setiap suku banyak di $R[x]$ yang merupakan elemen di $R\backslash\{0\}$ mempunyai derajat 0. Khusus untuk suku banyak $0 \in R[x]$, didefinisikan $\deg(0) = -\infty$. Elemen-elemen di R disebut **skalar** atau **suku banyak konstan.**

Example 1

Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan dua suku banyak $f(x) = 2x^3 + x^2 + 10x + 1$ dan $g(x) = x^2 + 5x + 1$. Derajat dari $f(x)$ adalah 3 dan derajat dari $g(x)$ adalah 2. Suku banyak $g(x)$ merupakan suku banyak monik. $\square$

Example 1

Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan dua suku banyak $f(x) = 2x^3 + x^2 + 10x + 1$ dan $g(x) = x^2 + 5x + 1$. Derajat dari $f(x)$ adalah 3 dan derajat dari $g(x)$ adalah 2. Suku banyak $g(x)$ merupakan suku banyak monik. $\square$

Lema 1

Diberikan sebarang ring komutatif R. Untuk sebarang suku banyak $f(x), g(x) \in R[x]$ berlaku

- (i) $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$,
- (ii) $\deg(f(x) \cdot g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x))$, *dan*
- (iii) *kesamaan pada (ii) dipenuhi jika leading coefficient dari $f(x)$ atau $g(x)$ bukan pembagi nol.*

Bukti

(i) Jika $\deg(f(x)) \neq \deg(g(x))$ maka

$$\deg(f(x)+g(x)) = \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

Jika $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$ maka kemungkinan yang terjadi adalah $f(x)+g(x) = 0$ atau

$$\deg(f(x)+g(x)) < \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

Bukti

(i) Jika $\deg(f(x)) \neq \deg(g(x))$ maka

$$\deg(f(x)+g(x)) = \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

Jika $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$ maka kemungkinan yang terjadi adalah $f(x)+g(x) = 0$ atau

$$\deg(f(x)+g(x)) < \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

(ii) Jika $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ maka

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}.$$

Jika $f(x)g(x) \neq 0$ maka tidak ada satu koefisien dari $f(x)g(x)$ yang tak nol. Misalkan $a_nb_m \neq 0$, diperoleh

$$\deg(f(x)g(x)) = n + m = \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Misalkan $a_nb_m = 0$ (kasus ini hanya dapat ditemui ketika R mempunyai pembagi nol), sehingga diperoleh

$$\deg(f(x)g(x)) < \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Bukti

(i) Jika $\deg(f(x)) \neq \deg(g(x))$ maka

$$\deg(f(x)+g(x)) = \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

Jika $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$ maka kemungkinan yang terjadi adalah $f(x)+g(x) = 0$ atau

$$\deg(f(x)+g(x)) < \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

(ii) Jika $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ maka

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}.$$

Jika $f(x)g(x) \neq 0$ maka tidak ada satu koefisien dari $f(x)g(x)$ yang tak nol. Misalkan $a_nb_m \neq 0$, diperoleh

$$\deg(f(x)g(x)) = n+m = \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Misalkan $a_nb_m = 0$ (kasus ini hanya dapat ditemui ketika R mempunyai pembagi nol), sehingga diperoleh

$$\deg(f(x)g(x)) < \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

(iii) Sebagai latihan

Teorema 1

Diberikan sebarang ring R. Jika R daerah integral maka $R[x]$ juga merupakan daerah integral.

Teorema 1

Diberikan sebarang ring R. Jika R daerah integral maka $R[x]$ juga merupakan daerah integral.

Bukti: Pada pembahasan sebelumnya, telah dijelaskan bahwa jika R komutatif dan memuat elemen satuan maka $R[x]$ juga memuat elemen satuan, yaitu suku banyak $f(x) = 1$.

Sehingga untuk membuktikan $R[x]$ juga merupakan daerah integral, cukup ditunjukkan $R[x]$ tidak memuat pembagi nol.

Teorema 1

Diberikan sebarang ring R. Jika R daerah integral maka $R[x]$ juga merupakan daerah integral.

Bukti: Pada pembahasan sebelumnya, telah dijelaskan bahwa jika R komutatif dan memuat elemen satuan maka $R[x]$ juga memuat elemen satuan, yaitu suku banyak $f(x) = 1$.

Sehingga untuk membuktikan $R[x]$ juga merupakan daerah integral, cukup ditunjukkan $R[x]$ tidak memuat pembagi nol.

Diambil sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$.

Mengingat R adalah daerah integral dan berdasarkan Lema 1 diperoleh

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) \geq 0 > -\infty.$$

Akibatnya, $f(x)g(x) \neq 0$. Jadi $R[x]$ merupakan daerah integral.

Akibat 1

Diberikan sebarang daerah integral R.
Setiap elemen unit di $R[x]$ merupakan elemen unit di R.

Akibat 1

Diberikan sebarang daerah integral R.
Setiap elemen unit di $R[x]$ merupakan elemen unit di R.

Bukti: Diambil sebarang elemen unit $f(x)$ di $R[x]$, berarti terdapat $g(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 1_R$. Berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$\deg(f(x)) + \deg(g(x)) = \deg(f(x)g(x)) = \deg(1_R) = 0.$$

Akibat 1

Diberikan sebarang daerah integral R.
Setiap elemen unit di $R[x]$ merupakan elemen unit di R.

Bukti: Diambil sebarang elemen unit $f(x)$ di $R[x]$, berarti terdapat $g(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 1_R$. Berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$\deg(f(x)) + \deg(g(x)) = \deg(f(x)g(x)) = \deg(1_R) = 0.$$

Oleh karena itu, $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing merupakan suku banyak dengan derajat 0, yaitu $f(x), g(x) \in R$. Jadi, elemen unit di $R[x]$ juga merupakan elemen unit di R.

Teorema 2

Jika F lapangan, maka $F[x]$ merupakan daerah integral.

Teorema 2

Jika F lapangan, maka $F[x]$ merupakan daerah integral.

Bukti: Diketahui F adalah lapangan. Karena setiap lapangan adalah daerah integral, berakibat F adalah daerah integral. Berdasarkan Teorema 1, berakibat $F[x]$ merupakan daerah integral.

Teorema 2

Jika F lapangan, maka $F[x]$ merupakan daerah integral.

Bukti: Diketahui F adalah lapangan. Karena setiap lapangan adalah daerah integral, berakibat F adalah daerah integral. Berdasarkan Teorema 1, berakibat $F[x]$ merupakan daerah integral.

Perlu dicatat di sini bahwa: walaupun F merupakan lapangan $F[x]$ bukanlah lapangan sebab elemen x tidak mempunyai invers dalam $F[x]$.

1. Ring Polinomial Atas Lapangan ($F[x]$)
2. Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa
3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

2. Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa

Jika R ring komutatif dengan elemen satuan,
$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$ dan
$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$ suatu suku banyak di $R[x]$ dengan *leading coefficient* unit b_m di R dan $m \geq 1$.

2. Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa

Jika R ring komutatif dengan elemen satuan,
$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ dan
$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ suatu suku banyak di $R[x]$ dengan *leading coefficient* unit b_m di R dan $m \geq 1$.
Jika $n \in \mathbb{Z}$ dengan $n \geq m$ maka dapat dibentuk suku banyak $q_1(x) = b_m^{-1}a_nx^{n-m} \in R[x]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x) - g(x)q_1(x) \\
&= a_0 + \cdots + a_nx^n - ((b_0 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m)b_m^{-1}a_nx^{n-m}) \\
&= a_0 + \cdots + a_nx^n - (b_0b_m^{-1}a_nx^{n-m} + \cdots + b_{m-1}b_m^{-1}a_nx^{n-1} + a_nx^n) \\
&= a_0 + \cdots + a_{n-m-1}x^{n-m-1} + (a_{n-m} - b_0b_m^{-1}a^n)x^{n-m} + \cdots \\
&\qquad + (a_{n-1} - b_{m-1}b_m^{-1}a_n)x^{n-1} + (a_n - a_n)x^n \\
&= a_0 + \cdots + a_{n-m-1}x^{n-m-1} + (a_{n-m} - b_0b_m^{-1}a^n)x^{n-m} + \cdots \\
&\qquad + (a_{n-1} - b_{m-1}b_m^{-1}a_n)x^{n-1}
\end{aligned}$$

dengan $\deg(f_1(x)) \leq n - 1$.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.
- Proses dilanjutkan sampai diperoleh suatu suku banyak $f_s(x)$ pertama dengan $\deg(f_s(x)) < m$.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.
- Proses dilanjutkan sampai diperoleh suatu suku banyak $f_s(x)$ pertama dengan $\deg(f_s(x)) < m$.
- Proses tersebut pasti terdiri atas berhingga (s) langkah, sebab derajat dari $f(x)$ berhingga.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.
- Proses dilanjutkan sampai diperoleh suatu suku banyak $f_s(x)$ pertama dengan $\deg(f_s(x)) < m$.
- Proses tersebut pasti terdiri atas berhingga (s) langkah, sebab derajat dari $f(x)$ berhingga.
- Dibentuk $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_s(x)$ dan $r(x) = f(x) - g(x)q(x)$.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.
- Proses dilanjutkan sampai diperoleh suatu suku banyak $f_s(x)$ pertama dengan $\deg(f_s(x)) < m$.
- Proses tersebut pasti terdiri atas berhingga (s) langkah, sebab derajat dari $f(x)$ berhingga.
- Dibentuk $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_s(x)$ dan $r(x) = f(x) - g(x)q(x)$.
- Dengan demikian diperoleh persamaan suku banyak $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

- Jika $\deg(f_1(x)) \geq m$ maka proses tersebut diulangi, yaitu peran $f(x)$ digantikan oleh $f_1(x)$ sehingga diperoleh suku banyak $q_2(x)$ dan $f_3(x)$ di $R[x]$.
- Proses dilanjutkan sampai diperoleh suatu suku banyak $f_s(x)$ pertama dengan $\deg(f_s(x)) < m$.
- Proses tersebut pasti terdiri atas berhingga (s) langkah, sebab derajat dari $f(x)$ berhingga.
- Dibentuk $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_s(x)$ dan $r(x) = f(x) - g(x)q(x)$.
- Dengan demikian diperoleh persamaan suku banyak $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

Proses di atas dikenal sebagai algoritma pembagian untuk suku banyak.

Diperoleh Teorema Algoritma Pembagian.

Teorema 3

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan. Jika $f(x) \in R[x]$ *dan* $g(x)$ *adalah suatu suku banyak di* $R[x]$ *dengan leading coefficient dari* $g(x)$ *merupakan unit di R maka terdapat dengan tunggal suku banyak* $q(x)$ *dan* $r(x)$ *di* $R[x]$ *dengan* $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ *sedemikian sehingga*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Bukti Teorema Algoritma Pembagian

Proses yang telah dijelaskan sebelumnya merupakan bukti eksistensi dari suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$ di $R[x]$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Dengan demikian, tinggal ditunjukkan ketunggalan dari suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$ tersebut.

Bukti Teorema Algoritma Pembagian

Misal terdapat dua bentuk dekomposisi $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dan $f(x) = g(x)p(x) + t(x)$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ dan $\deg(t(x)) < \deg(g(x))$.

Dari dua bentuk dekomposisi tersebut, diperoleh bahwa $g(x)(q(x) - p(x)) = t(x) - r(x)$. Karena *leading coefficient* dari $g(x)$ merupakan unit (yang berakibat bukan pembagi nol), berdasarkan Lema 1 (iii) diperoleh $\deg(g(x)) + \deg(q(x) - p(x)) = \deg(t(x) - r(x)) < \deg(g(x))$. Dari sini diperoleh $\deg(g(x)) + \deg(q(x) - p(x)) < \deg(g(x))$.

Akibatnya, $\deg(q(x) - p(x)) = -\infty$, yaitu $q(x) - p(x) = 0$, yang berarti $q(x) = p(x)$. Karena $q(x) = p(x)$, berakibat

$$t(x) = f(x) - g(x)q(x) = f(x) - g(x)p(x) = r(X).$$

Jadi, terbukti ketunggalan suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$.

Contoh sebagai ilustrasi.

Example 2

Diberikan ring suku banyak $\mathbb{Z}_6[x]$. Misalkan $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{1}$ dan $g(x) = \overline{5}x^2 + \overline{2}$ masing-masing adalah suku banyak di $\mathbb{Z}_6[x]$. Akan dicari suku banyak $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Contoh sebagai ilustrasi.

Example 2

Diberikan ring suku banyak $\mathbb{Z}_6[x]$. Misalkan $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{1}$ dan $g(x) = \overline{5}x^2 + \overline{2}$ masing-masing adalah suku banyak di $\mathbb{Z}_6[x]$. Akan dicari suku banyak $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Untuk mendapatkan suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$ tersebut dapat menggunakan proses yang telah dijelaskan sebelumnya, atau dapat lebih mudah menggunakan metode yang dikenal dengan nama *'poro gapit'* sebagai berikut:

Poro Gapit

$$
\begin{array}{rlllll}
\overline{5}x^2+\overline{2}\,\big) & \overline{2}x^3 & + \ \overline{3}x^2 & + \ \overline{1} & \big(\ \overline{4}x+\overline{3} = q(x) \\
 & \overline{2}x^3 & + \ \overline{2}x & & \\
\hline
 & & \overline{3}x^2 & + \ \overline{4}x & + 1 \\
 & & \overline{3}x^2 & & \\
\hline
 & & & \overline{4}x & + \ \overline{1} = r(x).
\end{array}
$$

Poro Gapit

$$
\begin{array}{rlllll}
\overline{5}x^2+\overline{2} \,\big) & \overline{2}x^3 & + \ \overline{3}x^2 & + \ \overline{1} & \big(\ \overline{4}x+\overline{3} = q(x) \\
& \overline{2}x^3 & + \ \overline{2}x & & \\
\cline{2-4}
& & \overline{3}x^2 & + \ \overline{4}x & +\,1 \\
& & \overline{3}x^2 & & \\
\cline{3-5}
& & & \overline{4}x & +\,\overline{1} = r(x). & -
\end{array}
$$

Dengan demikian, diperoleh suku banyak $q(x) = \overline{4}x + \overline{3}$ dan $r(x) = \overline{4}x + \overline{1}$ di $\mathbb{Z}_6[x]$ dengan $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, yaitu
$\overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{1} = (\overline{5}x^2 + \overline{2})(\overline{4}x + \overline{3}) + (\overline{4}x + \overline{1})$.

Teorema Sisa

Akibat 2

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan. Untuk setiap $a \in R$ *dan* $f(x) \in R[x]$ *terdapat* $q(x) \in R[x]$ *sedemikian sehingga*

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

Teorema Sisa

Akibat 2

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan. Untuk setiap $a \in R$ dan $f(x) \in R[x]$ terdapat $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

Bukti: Diambil sebarang $a \in R$ dan $f(x) \in R[x]$. Misal dibentuk suku banyak $x - a = g(x) \in R[x]$. Berdasarkan algoritma pembagian, terdapat dengan tunggal $q(x), r(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, dengan $\deg(r(x)) \leq 0$. Oleh karena itu, $r(x)$ merupakan suku banyak konstan, katakan $r(x) = d$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan a untuk x diperoleh $f(a) = (a - a)q(a) + d = d$. Jadi, didapat

$$f(x) = (x - a)q(x) + d = (x - a)q(x) + f(a).$$

Teorema Faktorisasi

Teorema 4

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan, $f(x) \in R[x]$, dan $a \in R$. Suku banyak $x - a$ membagi habis $f(x)$ jika dan hanya jika a merupakan akar dari suku banyak $f(x)$.

Teorema Faktorisasi

Teorema 4

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan, $f(x) \in R[x]$, dan $a \in R$. Suku banyak $x - a$ membagi habis $f(x)$ jika dan hanya jika a merupakan akar dari suku banyak $f(x)$.

Bukti: Diambil sebarang $f(x) \in R[x]$ dan $a \in R$.
$(\Rightarrow)$. Diketahui suku banyak $x - a$ membagi habis $f(x)$, berarti terdapat $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = (x - a)q(x)$. Oleh karena itu, $f(a) = (a - a)q(a) = 0$ sehingga diperoleh bahwa a merupakan akar dari $f(x)$.

Teorema Faktorisasi

Teorema 4

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan, $f(x) \in R[x]$, dan $a \in R$. Suku banyak $x - a$ membagi habis $f(x)$ jika dan hanya jika a merupakan akar dari suku banyak $f(x)$.

Bukti: Diambil sebarang $f(x) \in R[x]$ dan $a \in R$.
($\Rightarrow$). Diketahui suku banyak $x - a$ membagi habis $f(x)$, berarti terdapat $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = (x - a)q(x)$. Oleh karena itu, $f(a) = (a - a)q(a) = 0$ sehingga diperoleh bahwa a merupakan akar dari $f(x)$.
($\Leftarrow$). Diketahui a adalah akar dari suku banyak $f(x)$, berarti $f(a) = 0$. Berdasarkan Akibat 2, terdapat $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a) = (x - a)q(x) + 0 = (x - a)q(x).$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $x - a$ membagi habis $f(x)$.

Teorema 5

Diberikan sebarang daerah integral R. Jika $f(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ dengan $\deg(f(x)) = n$ maka suku banyak $f(x)$ mempunyai paling banyak n akar di R.

Bukti

Diketahui $f(x) \in R[x]\backslash\{0\}$ dengan $\deg(f(x)) = n$. Jika $n = 0$ maka $f(x)$ merupakan suku banyak konstan, katakan $f(x) = c \neq 0$. Dari sini jelas bahwa $f(x)$ tidak mempunyai akar di R, sebab untuk setiap $a \in R$, $f(a) \neq 0$. Selanjutnya, akan ditunjukkan teorema benar untuk $n > 0$ menggunakan metode induksi matematika. Diasumsikan Teorema benar untuk semua suku banyak di $R[x]$ dengan derajat kurang dari n. Akan ditunjukkan teorema benar untuk suku banyak $f(x)$ dengan $\deg(f(x)) = n$.

Lanjutan Bukti

Jika $f(x)$ tidak mempunyai akar di R maka teorema benar. Misalkan $r \in R$ merupakan akar dari $f(x)$. Berdasarkan Akibat 4, terdapat suku banyak $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = (x - r)q(x)$, dengan $\deg(q(x)) = n - 1$. Misalkan ada akar yang lain dari $f(x)$, katakan $s \in R$, berarti $0 = f(s) = (s - r)q(s)$. Karena $s \neq r$ dan R merupakan daerah integral, diperoleh $q(s) = 0$. Oleh karena itu, setiap akar yang lain dari $f(x)$ juga merupakan akar dari $q(x)$.

Karena $f(x) = (x - r)q(x)$, setiap akar dari $q(x)$ merupakan akar dari $f(x)$. Dari fakta $\deg(q(x)) = n - 1$ dan dari asumsi bahwa teorema benar untuk suku banyak di $R[x]$ dengan derajat kurang dari n, diperoleh kesimpulan bahwa $q(x)$ mempunyai paling banyak $n - 1$ akar di R. Akibatnya, $f(x) = (x - r)q(x)$ mempunyai paling banyak n akar di R.

Catatan:

Perlu diperhatikan bahwa hasil dari Teorema 5 di atas tidak berlaku jika R bukan daerah integral. Sebagai contoh, misal diambil ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Mudah dipahami bahwa keempat elemen dari ring R, yakni $(0,0), (0,1), (1,0)$ dan $(1,1)$ merupakan akar dari suku banyak berderajat 2 $x^2 - x \in R[x]$.

Catatan:

Perlu diperhatikan bahwa hasil dari Teorema 5 di atas tidak berlaku jika R bukan daerah integral. Sebagai contoh, misal diambil ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Mudah dipahami bahwa keempat elemen dari ring R, yakni $(0,0), (0,1), (1,0)$ dan $(1,1)$ merupakan akar dari suku banyak berderajat 2 $x^2 - x \in R[x]$.

Akibat 3

Misalkan R daerah integral dan $f(x), g(x) \in R[x]$ suku banyak dengan derajat $\leq n$. Jika $f(a) = g(a)$ untuk sebanyak $n+1$ elemen berbeda a di R maka $f(x) = g(x)$.

Catatan:

Perlu diperhatikan bahwa hasil dari Teorema 5 di atas tidak berlaku jika R bukan daerah integral. Sebagai contoh, misal diambil ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Mudah dipahami bahwa keempat elemen dari ring R, yakni $(0,0),(0,1),(1,0)$ dan $(1,1)$ merupakan akar dari suku banyak berderajat 2 $x^2 - x \in R[x]$.

Akibat 3

Misalkan R daerah integral dan $f(x), g(x) \in R[x]$ suku banyak dengan derajat $\leq n$. Jika $f(a) = g(a)$ untuk sebanyak $n+1$ elemen berbeda a di R maka $f(x) = g(x)$.

Bukti: Misalkan $h(x) = f(x) - g(x)$. Mengingat $\deg\left(f(x)\right) \leq n$ dan $\deg\left(g(x)\right) \leq n$, diperoleh bahwa $\deg(h(x)) \leq n$ dan mempunyai lebih dari n akar berbeda di R. Berdasarkan Teorema 5, haruslah $h(x) = 0_R$. Jadi, terbukti $f(x) = g(x)$.

1 Ring Polinomial Atas Lapangan ($F[x]$)

2 Algoritma Pembagian dan Teorema Sisa

3 Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

- Sebelumnya telah diperkenalkan beberapa jenis ring khusus, yakni daerah integral (DI) dan lapangan.

3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

- Sebelumnya telah diperkenalkan beberapa jenis ring khusus, yakni daerah integral (DI) dan lapangan.
- Selanjutnya, akan diperkenalkan lebih lanjut tentang jenis ring khusus lainnya, yakni daerah ideal utama (DIU) dan daerah Euclid (DE).

3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

- Sebelumnya telah diperkenalkan beberapa jenis ring khusus, yakni daerah integral (DI) dan lapangan.
- Selanjutnya, akan diperkenalkan lebih lanjut tentang jenis ring khusus lainnya, yakni daerah ideal utama (DIU) dan daerah Euclid (DE).
- DIU merupakan kejadian khusus dari daerah integral, yaitu daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu elemen.

3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

- Sebelumnya telah diperkenalkan beberapa jenis ring khusus, yakni daerah integral (DI) dan lapangan.
- Selanjutnya, akan diperkenalkan lebih lanjut tentang jenis ring khusus lainnya, yakni daerah ideal utama (DIU) dan daerah Euclid (DE).
- DIU merupakan kejadian khusus dari daerah integral, yaitu daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu elemen.
- DE juga merupakan kejadian khusus dari daerah integral, yaitu daerah integral yang dilengkapi suatu fungsi valuasi Euclid.

3. Daerah Ideal Utama (DIU) dan Daerah Euclid (DE)

- Sebelumnya telah diperkenalkan beberapa jenis ring khusus, yakni daerah integral (DI) dan lapangan.
- Selanjutnya, akan diperkenalkan lebih lanjut tentang jenis ring khusus lainnya, yakni daerah ideal utama (DIU) dan daerah Euclid (DE).
- DIU merupakan kejadian khusus dari daerah integral, yaitu daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu elemen.
- DE juga merupakan kejadian khusus dari daerah integral, yaitu daerah integral yang dilengkapi suatu fungsi valuasi Euclid.
- Munculnya pengertian DIU dari sifat daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$, sedangkan pengertian fungsi valuasi Euclid tersebut dimotivasi dari sifat fungsi nilai mutlak pada daerah integral $\mathbb{Z}$.

Ideal Utama

Sebelum masuk ke pokok bahasan tentang daerah ideal utama, terlebih dahulu akan ditampilkan sifat-sifat ideal dalam daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Ideal Utama

Sebelum masuk ke pokok bahasan tentang daerah ideal utama, terlebih dahulu akan ditampilkan sifat-sifat ideal dalam daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Dalam ring $\mathbb{Z}$, untuk sebarang bilangan bulat n, himpunan $n\mathbb{Z} = \{az \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal yang dibangun singleton $\{n\}$. Secara singkat, dikatakan bahwa ideal $n\mathbb{Z}$ dibangun oleh satu elemen n.

Ideal Utama

Sebelum masuk ke pokok bahasan tentang daerah ideal utama, terlebih dahulu akan ditampilkan sifat-sifat ideal dalam daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Dalam ring $\mathbb{Z}$, untuk sebarang bilangan bulat n, himpunan $n\mathbb{Z} = \{az \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal yang dibangun singleton $\{n\}$. Secara singkat, dikatakan bahwa ideal $n\mathbb{Z}$ dibangun oleh satu elemen n.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa setiap ideal dalam daerah integral $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dapat dibangun oleh suatu elemen $a \in \mathbb{Z}$. Untuk membuktikannya, dibedakan untuk $I = \{0\}$ dan $I \neq \{0\}$.

Bukti bahwa pada DI $\mathbb{Z}$ setiap idealnya dibangun oleh satu elemen

Untuk $I = \{0\}$, jelas bahwa I dibangun oleh elemen $a = 0$, sebab

$$0\mathbb{Z} = \{0n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{0\} = I.$$

Diperhatikan untuk ideal $I \neq \{0\}$ di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap bilangan $n \in I \backslash \{0\}$, mudah dipahami bahwa $-n = -1 \cdot n \in I$, sebab I merupakan ideal di $\mathbb{Z}$. Dengan demikian, kita dapat memilih bilangan positif terkecil a di $I \backslash \{0\}$, yaitu $a = \min\{|n| \mid n \in I, n \neq 0\}$. Dapat ditunjukkan bahwa $I = a\mathbb{Z}$. Diambil sebarang $x \in a\mathbb{Z}$, artinya terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $x = ak$. Karena $a \in I$ dan I adalah ideal di $\mathbb{Z}$, berakibat $x = ak \in I$. Dengan demikian, diperoleh $a\mathbb{Z} \subseteq I$. Selanjutnya, diambil sebarang $y \in I \subseteq \mathbb{Z}$. Mudah dipahami bahwa bilangan bulat y dapat ditulis dalam bentuk $y = aq + r$, untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$ dengan sifat $0 \leq r < a$. Karena $y, aq \in I$, diperoleh $r = y - aq \in I$. Mengingat a adalah bilangan positif terkecil di I, maka haruslah $r = 0$. Jadi, diperoleh $y = aq \in a\mathbb{Z}$ dan terbukti $I = a\mathbb{Z}$.

Dengan fenomena tersebut didefinisikan pengertian ideal utama pada sebarang ring R.

Definisi 2

Misalkan $(R, +, \cdot)$ *adalah ring. Ideal* I *disebut* ***ideal utama*** *jika* I *dapat dibangun oleh suatu elemen dalam* R*, yaitu ada* $a \in R$ *sedemikian sehingga* $I = \langle a \rangle$.

Dengan fenomena tersebut didefinisikan pengertian ideal utama pada sebarang ring R.

Definisi 2

Misalkan $(R, +, \cdot)$ *adalah ring. Ideal* I *disebut* ***ideal utama*** *jika* I *dapat dibangun oleh suatu elemen dalam R, yaitu ada* $a \in R$ *sedemikian sehingga* $I = \langle a \rangle$.

Catatan:

Tidak semua ideal dalam suatu ring merupakan ideal utama, sebagai contoh ideal $I = \langle \{2, X\} \rangle$ pada ring suku banyak $\mathbb{Z}[X]$ bukan merupakan ideal utama karena tidak ada $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ sedemikian sehingga $I = \langle \{2, X\} \rangle = \langle p(X) \rangle$. Perhatikan kembali bahwa setiap ideal pada ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Dengan demikian dapat ditarik kesimpulan bahwa pada ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$, setiap idealnya merupakan ideal utama, sedangkan pada ring $\mathbb{Z}[X]$, tidak setiap idealnya merupakan ideal utama.

Fenomena inilah yang akan mendasari munculnya definisi daerah ideal utama (DIU)

Elemen-elemen khusus pada ring dan sifat-sifatnya.

Definisi 3

Diberikan sebarang ring komutatif dan $a, b \in R$ *dengan* $a \neq 0_R$. *Elemen* a *dikatakan* ***membagi*** b, *dinotasikan dengan* $a \mid b$, *jika* $b = ca$ *untuk suatu* $c \in R$.

Elemen-elemen khusus pada ring dan sifat-sifatnya.

Definisi 3

Diberikan sebarang ring komutatif dan $a, b \in R$ dengan $a \neq 0_R$. Elemen a dikatakan ***membagi*** *b, dinotasikan dengan $a \mid b$, jika $b = ca$ untuk suatu $c \in R$.*

Example 3

1. Pada ring komutatif $\mathbb{Z}$, $3 \mid 6$ sebab terdapat $2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $6 = 2 \cdot 3$.
2. Pada ring komutatif $\mathbb{Z}_{10}$, $\overline{3} \mid \overline{5}$ sebab terdapat $\overline{5} \in \mathbb{Z}_{10}$ sedemikian sehingga $\overline{5} = \overline{5} \cdot_{10} \overline{3}$.
3. Pada ring $\mathbb{Z}$, $3 \nmid 5$ sebab tidak ada $r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $5 = r \cdot 3$. $\square$

Elemen-elemen khusus pada ring dan sifat-sifatnya.

Dari Definisi 3 di atas, dapat diturunkan sifat-sifat dasar sebagai berikut. Untuk setiap $a, b, c \in R$,

(i) $a \mid a$, $1_R \mid a$, dan $a \mid 0_R$,

(ii) a merupakan elemen unit jika dan hanya jika $a \mid 1_R$,

(iii) jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$.

Elemen prima dan eleman tak tereduksi

Berikut beberapa definisi terkait dengan ketereduksian dan keprimaan suatu elemen dalam kaitannya dengan elemen unit.

Definisi 4

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R, *dan* $a, b \in R \setminus \{0_R\}$.

(i) *Elemen a dan b dikatakan **berasosiasi**, dinotasikan dengan* $a \sim b$, *jika* $a = ub$ *untuk suatu unit* $u \in R$.

Elemen prima dan eleman tak tereduksi

Berikut beberapa definisi terkait dengan ketereduksian dan keprimaan suatu elemen dalam kaitannya dengan elemen unit.

Definisi 4

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R*, dan* $a, b \in R \setminus \{0_R\}$.

(i) *Elemen a dan b dikatakan* ***berasosiasi****, dinotasikan dengan* $a \sim b$*, jika* $a = ub$ *untuk suatu unit* $u \in R$.

(ii) *Elemen tak unit a disebut* ***elemen tak tereduksi*** *jika untuk setiap* $r, s \in R$ *dengan sifat* $a = rs$ *maka berakibat r merupakan elemen unit atau s merupakan elemen unit.*

Elemen prima dan eleman tak tereduksi

Berikut beberapa definisi terkait dengan ketereduksian dan keprimaan suatu elemen dalam kaitannya dengan elemen unit.

Definisi 4

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R, dan $a, b \in R \backslash \{0_R\}$.

1. *Elemen a dan b dikatakan **berasosiasi**, dinotasikan dengan $a \sim b$, jika $a = ub$ untuk suatu unit $u \in R$.*
2. *Elemen tak unit a disebut **elemen tak tereduksi** jika untuk setiap $r, s \in R$ dengan sifat $a = rs$ maka berakibat r merupakan elemen unit atau s merupakan elemen unit.*
3. *Elemen tak unit a disebut **elemen tereduksi** jika terdapat $r, s \in R$ yang keduanya bukan elemen unit sedemikian sehingga berlaku $a = rs$.*

Elemen prima dan eleman tak tereduksi

Berikut beberapa definisi terkait dengan ketereduksian dan keprimaan suatu elemen dalam kaitannya dengan elemen unit.

Definisi 4

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R, dan $a, b \in R \backslash \{0_R\}$.

(i) *Elemen a dan b dikatakan **berasosiasi**, dinotasikan dengan $a \sim b$, jika $a = ub$ untuk suatu unit $u \in R$.*

(ii) *Elemen tak unit a disebut **elemen tak tereduksi** jika untuk setiap $r, s \in R$ dengan sifat $a = rs$ maka berakibat r merupakan elemen unit atau s merupakan elemen unit.*

(iii) *Elemen tak unit a disebut **elemen tereduksi** jika terdapat $r, s \in R$ yang keduanya bukan elemen unit sedemikian sehingga berlaku $a = rs$.*

(iv) *Elemen tak unit a disebut **elemen prima** jika $r, s \in R$ dengan sifat $a \mid rs$ maka berakibat $a \mid r$ atau $a \mid s$.*

Relasi assosiasi

Example 4

Berikut ini diberikan contoh-contoh terkait Definisi 4.

- Pada ring $\mathbb{Z}$, setiap elemen $a \in \mathbb{Z}$ berasosiasi dengan $-a$ sebab $a = -1 \cdot a$, dengan -1 adalah elemen unit di ring $\mathbb{Z}$.

Relasi assosiasi

Example 4

Berikut ini diberikan contoh-contoh terkait Definisi 4.

- Pada ring $\mathbb{Z}$, setiap elemen $a \in \mathbb{Z}$ berasosiasi dengan $-a$ sebab $a = -1 \cdot a$, dengan -1 adalah elemen unit di ring $\mathbb{Z}$.
- Misal $p(X) = X^2 + 1$ adalah suku banyak di $\mathbb{R}[X]$. Dapat dibuktikan bahwa suku banyak $p(X)$ merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{R}[X]$. Andaikan $p(X)$ adalah elemen tereduksi di $\mathbb{R}[X]$. Berdasarkan Akibat 1, elemen-elemen unit di $\mathbb{R}[X]$ berupa elemen-elemen tak nol di $\mathbb{R}$. Mengingat $p(X)$ merupakan elemen tereduksi di $\mathbb{R}[X]$, maka terdapat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dengan $a, c \neq 0$, sedemikian sehingga $X^2 + 1 = (aX + b)(cX + d) = acX^2 + (ad + bc)X + bd$. Dari sini diperoleh $ac = 1 = bd$ dan $ad + bc = 0$ sehingga $1 = (ac)(bd) = (ad)(bc) = (ad)(-ad)$. Oleh karena itu, diperoleh $1 = -(ad)^2$ yang tidak mungkin terjadi di $\mathbb{R}$ (kontradiksi). Jadi pengandaian salah, yang benar $p(X)$ elemen tak tereduksi.

Contoh-contoh

Example 5

Berikut ini diberikan contoh-contoh terkait Definisi 4.

- Misal $p(X) = X^2 + 1$ adalah suku banyak di $\mathbb{C}[X]$. Suku banyak $p(X)$ merupakan elemen tereduksi di $\mathbb{R}[X]$. Hal ini disebabkan terdapat $X + i, X - i \in \mathbb{C}[X]$ sedemikian sehingga $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, dengan $X + i$ dan $X - i$ elemen tak unit di $\mathbb{C}[X]$.
- Pada ring $\mathbb{Z}$, mudah kita pahami bahwa bilangan $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ merupakan elemen prima.
- Elemen $\overline{2}$ di ring $\mathbb{Z}_{10}$ merupakan elemen prima. Sebagai buktinya, diambil sebarang $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_{10}$ dengan $\overline{2} \mid \overline{ab}$. Karena $\overline{2} \mid \overline{ab}$, diperoleh $\overline{ab} = \overline{k2}$ untuk suatu $\overline{k} \in \mathbb{Z}_{10}$. Hal ini berakibat $ab - 2k = 10r$, untuk suatu $r \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $ab = 2k + 10r = 2(k + 5r)$, sehingga $2 \mid ab$. Mengingat 2 adalah elemen prima di $\mathbb{Z}$, diperoleh $2 \mid a$ atau $2 \mid b$. Akibatnya, $\overline{2} \mid \overline{a}$ atau $\overline{2} \mid \overline{b}$. Jadi, terbukti $\overline{2}$ merupakan elemen prima di ring $\mathbb{Z}_{10}$. $\square$

Sifat terkait relasi asosiasi

Dari Definisi 4, dapat diturunkan beberapa sifat yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 6

Misalkan R adalah daerah integral dan $a, b \in R \setminus \{0_R\}$.

- (i) *Elemen a berasosiasi dengan b jika dan hanya jika $a \mid b$ dan $b \mid a$.*
- (ii) *Elemen a membagi b jika dan hanya jika $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$*
- (iii) *Elemen a merupakan elemen prima di R jika dan hanya jika $\langle a \rangle$ merupakan ideal prima di R.*
- (iv) *Jika a adalah elemen prima di R maka a merupakan tak tereduksi.*

Pembagi persekutuan terbesar

Kita sudah mengetahui makna dari pembagi persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan-bilangan dalam daerah integral $\mathbb{Z}$. Berikut ini akan didefinisikan pengertian umum tentang pembagi persekutuan terbesar dan kelipatan persekutan terkecil di dalam sebarang daerah integral R.

Pembagi persekutuan terbesar

Kita sudah mengetahui makna dari pembagi persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan-bilangan dalam daerah integral $\mathbb{Z}$. Berikut ini akan didefinisikan pengertian umum tentang pembagi persekutuan terbesar dan kelipatan persekutan terkecil di dalam sebarang daerah integral R.

Definisi 5

*Misalkan R adalah daerah integral dan A adalah himpunan bagian tak kosong dari $R \backslash \{0_R\}$. Elemen $d \in R$ disebut **pembagi persekutuan terbesar** (greatest common divisor) A jika*

(a) *untuk setiap $a \in A$, $d \mid a$; dan*

(b) *jika $b \in R$ dan $b \mid a$ untuk setiap $a \in A$ maka $b \mid d$.*

Pembagi persekutuan terbesar dari A dinotasikan $\gcd(A)$.

Kelipatan persekutuan terkecil

Definisi 6

Misalkan R adalah daerah integral dan A adalah himpunan bagian tak kosong dari $R \setminus \{0_R\}$. Elemen $l \in R \setminus \{0_R\}$ disebut ***kelipatan persekutuan terkecil*** *(least common multiple) A jika*

(a) *untuk setiap $a \in A$, $a \mid l$; dan*

(b) *jika $b \in R$ dan $a \mid b$ untuk setiap $a \in R$, maka $l \mid b$.*

Kelipatan persekutuan terkecil dari A dinotasikan $\mathrm{lcm}(A)$.

Pembagi persekutuan terbesar suatu himpunan A di dalam daerah integral belum tentu ada. Jika himpunan A mempunyai $\gcd$ maka $\gcd$ tersebut tidak selalu tunggal. Walaupun demikian, jika $\gcd$ dari A tidak tunggal, dapat ditunjukkan sebarang dua $\gcd$ dari suatu himpunan A saling berasosiasi. Dengan demikian, $\gcd$ dari suatu himpunan A dapat dikatakan tunggal relatif terhadap relasi asosiasi.

Pembagi persekutuan terbesar suatu himpunan A di dalam daerah integral belum tentu ada. Jika himpunan A mempunyai $\gcd$ maka $\gcd$ tersebut tidak selalu tunggal. Walaupun demikian, jika $\gcd$ dari A tidak tunggal, dapat ditunjukkan sebarang dua $\gcd$ dari suatu himpunan A saling berasosiasi. Dengan demikian, $\gcd$ dari suatu himpunan A dapat dikatakan tunggal relatif terhadap relasi asosiasi.

Mengingat $\gcd$ dari suatu himpunan A di dalam daerah integral belum tentu ada, kita perlu mempertanyakan syarat cukup apa sedemikian sehingga $\gcd$ dari A tersebut dijamin ada. Dalam daerah daerah ideal utama R yang akan dibahas pada subbab berikut, akan ditunjukkan bahwa $\gcd$ suatu himpunan bagian tak kosong dari R selalu ada.

Seperti sudah dikemukakan sebelumnya bahwa pada subbab ini akan dibahas suatu daerah integral khusus yang dimotivasi oleh sifat tertentu di daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Seperti sudah dikemukakan sebelumnya bahwa pada subbab ini akan dibahas suatu daerah integral khusus yang dimotivasi oleh sifat tertentu di daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Definisi 7

Daerah integral R disebut ***daerah ideal utama (DIU)*** *jika setiap idealnya merupakan ideal utama, yakni setiap idealnya dapat dibangun oleh satu elemen.*

Seperti sudah dikemukakan sebelumnya bahwa pada subbab ini akan dibahas suatu daerah integral khusus yang dimotivasi oleh sifat tertentu di daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Definisi 7

*Daerah integral R disebut **daerah ideal utama (DIU)** jika setiap idealnya merupakan ideal utama, yakni setiap idealnya dapat dibangun oleh satu elemen.*

Example 6

Dari pembahasan pada Subbab Ideal Utama yang telah dijelaskan di depan, telah kita ketahui bahwa setiap ideal I di dalam daerah integral $\mathbb{Z}$ merupakan ideal yang dibangun oleh satu elemen, yakni $I = n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah integral $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan daerah ideal utama. Ring $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ bukan daerah ideal utama walaupun masih merupakan daerah integral sebab ideal $\langle\{2, X\}\rangle$ bukan ideal utama. $\square$

Teorema 7

Jika F adalah lapangan maka $F[X]$ merupakan daerah ideal utama.

Bukti: Bukti sebagai latihan.

Berikut sifat penting dari DIU dalam kaitannya dengan eksistensi dari gcd.

Teorema 8

Misalkan R adalah daerah ideal utama dan A adalah himpunan bagian tak kosong dari R yang memuat paling tidak satu elemen tak nol. Sifat-sifat berikut ini berlaku.

- (i) *Suatu elemen $d \in R$ merupakan* gcd *dari A jika dan hanya jika d merupakan pembangun dari ideal $\langle A \rangle$.*
- (ii) *Jika $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ berhingga dan $a_i \neq 0_R$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ maka suatu elemen $l \in R$ merupakan lcm dari A jika dan hanya jika l merupakan pembangun dari ideal*

$$\langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle.$$

Bukti: Bukti sebagai latihan.

Dari teorema di atas, akan dapat dibuktikan bahwa pada DIU elemen prima identik dengan elemen tak tereduksi sebagaimana dinyatakan dalam akibat berikut.

Teorema 9

Jika R adalah DIU dan $a \in R \backslash \{0_R\}$ maka a merupakan elemen prima jika dan hanya jika a merupakan tak tereduksi.

Dari teorema di atas, akan dapat dibuktikan bahwa pada DIU elemen prima identik dengan elemen tak tereduksi sebagaimana dinyatakan dalam akibat berikut.

Teorema 9

Jika R adalah DIU dan $a \in R \backslash \{0_R\}$ *maka a merupakan elemen prima jika dan hanya jika a merupakan tak tereduksi.*

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ideal prima di DIU ekuivalen dengan ideal maksimal.

Teorema 10

Jika R merupakan DIU dan I merupakan ideal tak nol di R maka berlaku I prima jika dan hanya jika I maksimal.

Daerah Euclid

Akan dibahas daerah integral khusus yang merupakan abstraksi dari daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dalam kaitannya dengan sifat-sifat nilai mutlak bilangan bulat yang didefinisikan sebagai suatu fungsi dari daerah integral $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ke himpunan $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ sebagai berikut:

$$|n| = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ -n, & n < 0. \end{cases}$$

Daerah Euclid

Akan dibahas daerah integral khusus yang merupakan abstraksi dari daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dalam kaitannya dengan sifat-sifat nilai mutlak bilangan bulat yang didefinisikan sebagai suatu fungsi dari daerah integral $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ke himpunan $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ sebagai berikut:

$$|n| = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ -n, & n < 0. \end{cases}$$

Seperti sudah dketahui bahwa fungsi nilai mutlak bersifat:

1. untuk setiap $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $|n_1| \leq |n_1 n_2|$,
2. untuk setiap $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $n_2 \neq 0$, terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $n_1 = qn_2 + r$ dengan $|r| < |n_2|$ atau $r = 0$.

Dari sifat nilai mutlak ke fungsi valuasi Euclid

Termotivasi dari sifat fungsi nilai mutlak tersebut, didefinisikan fungsi valuasi Euclid pada sebarang daerah integral sebagai berikut.

Definisi 8

Misalkan R adalah suatu daerah integral. Suatu fungsi

$$\nu : R \backslash \{0_R\} \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

*disebut **fungsi valuasi Euclid** jika*

- (i) *untuk setiap* $r_1, r_2 \in R \backslash \{0_R\}$, $\nu(r_1) \leq \nu(r_1 r_2)$;
- (ii) *untuk setiap* $r_1, r_2 \in R$ *dengan* $r_2 \neq 0_R$, *terdapat* $q, r \in R$ *sedemikian sehingga* $r_1 = qr_2 + r$ *dengan* $\nu(r) < \nu(r_2)$ *atau* $r = 0$.

Contoh fungsi valuasi Euclid

Example 7

Dari sifat-sifat fungsi nilai mutlak, dapat disimpulkan bahwa fungsi nilai mutlak pada daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan fungsi valuasi Euclid.

Contoh fungsi valuasi Euclid

Example 7

Dari sifat-sifat fungsi nilai mutlak, dapat disimpulkan bahwa fungsi nilai mutlak pada daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan fungsi valuasi Euclid.

Example 8

Jika F merupakan lapangan maka fungsi $\nu : F[x] \setminus \{0_F\} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ dengan definisi $\nu(p(X)) = \deg(p(X))$ merupakan fungsi valuasi Euclid.

Pada daerah integral tidak selalu dapat dibuat fungsi valuasi Euclid. Dari kenyataan ini didefinisikanlah daerah Euclid berikut ini.

Definisi 9

*Suatu daerah integral R disebut **daerah Euclid** jika terdapat fungsi valuasi Euclid pada R.*

Dari definisi tersebut, dapat disimpulkan bahwa daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan ring suku banyak atas lapangan F merupakan contoh-contoh daerah Euclid.

Definisi 9

*Suatu daerah integral R disebut **daerah Euclid** jika terdapat fungsi valuasi Euclid pada R.*

Dari definisi tersebut, dapat disimpulkan bahwa daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan ring suku banyak atas lapangan F merupakan contoh-contoh daerah Euclid. Teorema berikut menjelaskan hubungan antara daerah Euclid dan daerah ideal utama.

Teorema 11

Jika R adalah daerah Euclid maka R merupakan daerah ideal utama.

Bukti

Misalkan R adalah daerah Euclid dengan fungsi valuasi Euclid $\nu : R\backslash\{0_R\} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Diambil sebarang ideal I dari R. Akan ditunjukkan bahwa I dapat dibangun oleh satu elemen. Untuk membuktikan hal tersebut, dibedakan menjadi dua kasus, yaitu kasus $I = 0$ dan $I \neq 0$. Untuk kasus $I = 0$, jelas $I = \langle 0_R \rangle$. Tinggal ditunjukkan untuk kasus $I \neq 0$. Bentuk himpunan $\nu(I) = \{\nu(a) \mid a \in I\backslash\{0_R\}\}$. Selanjutnya, dipilih $b \in I$ sedemikian sehingga $\nu(b)$ terkecil di antara elemen-elemen di $\nu(I)$.

Lanjutan Bukti

Akan dibuktikan bahwa $I = \langle b \rangle$. Diambil sebarang $x \in I$. Dengan mengingat ν merupakan fungsi valuasi Euclid, disimpulkan ada $q, r \in R$ sedemikian sehingga $x = qb + r$, dengan $\nu(r) < \nu(r_2)$ atau $r = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $r = 0$. Andaikan $r \neq 0$, maka haruslah $\nu(r) < \nu(b)$, dengan $r = qb - x$. Mengingat $b \in I$ dan I adalah ideal, maka $qb \in I$. Selanjutnya, mengingat $x \in I$ dan I adalah ideal, maka $r = qb - x$ juga termuat di I. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa b merupakan elemen di I dengan sifat $\nu(b)$ terkecil di $\nu(I)$. Jadi, pengandaian salah dan yang benar adalah $r = 0$ sehingga berakibat $x = qb$. Jadi, diperoleh I dibangun oleh b.

Catatan Penutup

- Prinsip kehati-hatian: dari definisi "Daerah Integral" sangat berbeda dengan "lapangan". Sama-sama diasumsikan ring nya komutatif dan dengan eleman satuan. Daerah integral syaratnya adalah tidak dimilikinya pembagi nol sejati, sedang lapangan disyaratkan setiap elemen tak nol nya mempunyai invers.

Catatan Penutup

- Prinsip kehati-hatian: dari definisi "Daerah Integral" sangat berbeda dengan "lapangan". Sama-sama diasumsikan ring nya komutatif dan dengan eleman satuan. Daerah integral syaratnya adalah tidak dimilikinya pembagi nol sejati, sedang lapangan disyaratkan setiap elemen tak nol nya mempunyai invers.
- Nampak sangat berbeda syaratnya, tapi ternyata jika R lapangan maka R merupakan daerah integral.

Catatan Penutup

- Prinsip kehati-hatian: dari definisi "Daerah Integral" sangat berbeda dengan "lapangan". Sama-sama diasumsikan ring nya komutatif dan dengan eleman satuan. Daerah integral syaratnya adalah tidak dimilikinya pembagi nol sejati, sedang lapangan disyaratkan setiap elemen tak nol nya mempunyai invers.
- Nampak sangat berbeda syaratnya, tapi ternyata jika R lapangan maka R merupakan daerah integral.
- Demikian juga dengan DIU dan DE, sama-sama diasumsikan ring nya merupakan daerah integral. DIU disyaratkan setiap idealnya dibangun oleh satu eleman, sedangkan DE disyaratkan adanya fungsi valuasi.

Catatan Penutup

- Nampak sangat berbeda, namun ternyata jika D merupakan DE maka D merupakan DIU.

Catatan Penutup

- Nampak sangat berbeda, namun ternyata jika D merupakan DE maka D merupakan DIU.
- Jika dirunut nampak bahwa $\mathbb{Z}$ dan $F[x]$ merupakan sruktur yang berbeda, tapi ternyata meraka mempunya stuktur yang sangat erat, sama DIU, sama-sama DE.

Referensi

[1] John B. Fraleigh, 1999; A First Course in Abstract Algebra; Fourth Edition; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[2] David S. Dummit, and Richard M. Foote, 1999, Abstract Algebra, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York

[3] D.S. Malik, John M. Mordeson, and M.K. Sen, 1998, Fundamental of Abstract, Fourth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[4] I. N. Herstein, 1975, Topics in Algebra, John Wiley and Sons Inc., New York

Thank you